**Занятие 1.**

**Способы обоснования истинности высказываний.**

**Логические операции.**

Основные понятия и термины по теме:

Содержание учебного материала:

1.Различные трактовки понятия логика.   
2.Математическая логика. Высказывания, понятия, суждения, умозаключения.   
3. Логическое мышление (анализ, синтез, абстрагирование, обобщение и др.).

4.Логические операции (конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция, отрицание).

5. Примеры выполнения логических операций.

6. Таблицы истинности логических операций. Краткое изложение теоретических вопросов:  
**ЛЕКЦИЯ**. **Логика** – это наука о формах и законах правильного мышления. Она появилась приблизительно в IV веке до н. э. в Древней Греции. Ее создателем считается знаменитый древнегреческий философ и ученый Аристотель. Как видим, логике примерно 2,5 тысячи лет. Однако она до сих пор сохраняет свое практическое значение. Многие науки и искусства Древнего мира навсегда ушли в прошлое и представляют для нас только «музейное» значение, интересны исключительно как памятники старины, но некоторые из них пережили века, и в настоящее время мы продолжаем ими пользоваться. К их числу относятся геометрия Евклида (в школе мы изучаем именно ее) и логика Аристотеля, которая также называется традиционной логикой. В XIX веке появилась и стала быстро развиваться символическая (или математическая) логика. В традиционной логике для исследования правильного мышления используется естественный язык (тот, на котором мы говорим, пишем, читаем), а в символической логике – искусственный язык, или язык символов, подобный языку математики. Символическая логика – достаточно специфическая и непростая наука, ее можно рассматривать как раздел математики и информатики. Аристотелевская логика, напротив, будучи более широкой, представляет собой своего рода универсальную науку: ее освоение одинаково полезно и даже необходимо каждому человеку, независимо от того, какие области знания и предметы являются для него более близкими – социально-гуманитарные, естественно-математические или технические.   
ЛОГИКА Традиционная Символическая (математическая)   
Так зачем нам нужна логика, какую роль она играет в нашей жизни? Логика помогает нам правильно строить свои мысли и верно их выражать, убеждать других людей и лучше понимать собеседника, объяснять и отстаивать свою точку зрения, избегать ошибок в рассуждениях. Логическая культура – это знание и соблюдение основных принципов и требований правильного построения и выражения мыслей как в устной, так и в письменной речи. Отсутствие такой культуры приводит к многочисленным и разнообразным логическим ошибкам, которые засоряют не только научное, но и повседневное мышление, мешают нам думать, общаться, понимать друг друга и самих себя. Неясность и неопределенность мышления, его непоследовательность и сумбурность, противоречивость и необоснованность являются прямым результатом отсутствия должного уровня логической культуры.  
Каждый из нас хорошо знает, что по содержанию человеческое мышление бесконечно многообразно, ведь мыслить (думать) можно о чем угодно, например, об устройстве мира и происхождении жизни на Земле, о прошлом человечества и его будущем, о прочитанных книгах и просмотренных фильмах, о сегодняшних занятиях и завтрашнем отдыхе… Но самое главное заключается в том, что наши мысли возникают и строятся по одним и тем же законам, подчиняются одним и тем же принципам, укладываются в одни и те же схемы или формы. Причем если содержание нашего мышления чрезвычайно разнообразно, то форм, в которых выражается это разнообразие, совсем немного.  
Приведем простой пример. Рассмотрим три высказывания: Все караси – это рыбы; Все треугольники – это геометрические фигуры; Все стулья – это предметы мебели. Несмотря на различное содержание, у этих высказываний есть нечто общее, что-то их объединяющее. Что же это? Их объединяет форма. Отличаясь по содержанию, они сходны по форме, ведь каждое из трех высказываний строится по форме Все А – это В, где А и В – какие-либо объекты. Понятно, что само высказывание «Все А – это В» лишено всякого содержания. Это высказывание представляет собой чистую форму, которую можно наполнить любым содержанием, например: Все сосны – это деревья; Все города – это населенные пункты; Все школы – это учебные заведения; Все тигры – это хищники и т. п. Другой пример. Возьмем три различных по содержанию высказывания: Если наступает осень, то опадают листья; Если завтра пройдет дождь, то на улице будут лужи; Если вещество – металл, то оно электропроводно. Будучи непохожими друг на друга по содержанию, эти высказывания сходны между собой тем, что строятся по одной и той же форме: Если А, то В. Понятно, что и к этой форме можно подобрать множество содержательных высказываний, например: Если не подготовиться к контрольной работе, то можно получить двойку; Если взлетная полоса покрыта льдом, то самолеты не смогут взлететь; Если слово стоит в начале предложения, то его надо писать с большой буквы и т. п. Логика не интересуется содержанием мышления (им занимаются другие науки), она изучает только формы мышления; ее интересует не то, что мы мыслим, а то, как мы мыслим, поэтому она часто называется формальной логикой. Например, если по содержанию высказывание «Все комары – это насекомые» является нормальным, а высказывание «Все Чебурашки-это инопланетяне» – абсурдным, то для логики эти два высказывания равноценны, так как она занимается формами мышления, а форма у этих высказываний одна и та же: Все А – это В. Как видим, форма мышления – это способ выражения мыслей, или схема их построения. Существует три формы мышления: понятие, суждение и умозаключение.  
Понятие – это форма мышления, которая обозначает какой-либо объект или признак объекта. Примеры понятий: карандаш, растение, небесное тело, химический элемент, мужество, глупость, нерадивость. Суждение – это форма мышления, которая состоит из понятий, связанных между собой, и что-либо утверждает или отрицает. Примеры суждений: Все планеты являются небесными телами, Некоторые школьники – это двоечники, Все треугольники не являются квадратами. Умозаключение – это форма мышления, в которой из двух или нескольких исходных суждений (посылок) вытекает новое суждение (вывод).  
В логике принято располагать посылки и вывод друг под другом и отделять вывод от посылок (в книге это сделано с помощью знака). Примеры умозаключений: Все планеты движутся. Юпитер – это планета. Юпитер движется.  
Железо электропроводно. Медь электропроводна. Ртуть электропроводна. Железо, медь, ртуть – металлы. Все металлы электропроводны. Весь бесконечный мир наших мыслей выражается в понятиях, суждениях и умозаключениях. Об этих трех формах мышления и пойдет речь на страницах книги. Помимо форм мышления логика также занимается законами мышления. Законы мышления – это такие объективные (т. е. сами по себе существующие и не зависящие от наших желаний и предпочтений) принципы или правила мышления, соблюдение которых всегда приводит рассуждение (независимо от его содержания) к истинным выводам при условии истинности исходных суждений.   
Основных законов мышления (или законов логики) четыре: закон тождества, закон противоречия, закон исключенного третьего и закон достаточного основания. Подробно каждый из них будет рассмотрен после изучения форм мышления. Нарушение этих законов приводит к различным логическим ошибкам, как правило, к ложным выводам. Иногда законы логики нарушают непроизвольно, по незнанию, но иногда это делают преднамеренно, с целью запутать собеседника и доказать ему какую-нибудь ложную мысль. Такие преднамеренные нарушения логических законов для внешне правильного доказательства ложных мыслей называются софизмами.  
Одного здравого смысла и жизненного опыта часто бывает достаточно для решения каких-либо задач. Например, любой человек, не знакомый с логикой, сможет найти подвох в следующем рассуждении: Движение вечно. Хождение в школу – это движение. Хождение в школу вечно. Ложный вывод получается из-за употребления слова движение в разных значениях: в первом суждении оно употребляется в широком, философском смысле, а во втором – в узком, механическом. Однако найти ошибку в рассуждении не всегда просто. Рассмотрим такой пример: Все мои друзья знают английский язык. Нынешний президент Америки знает английский язык. Нынешний президент Америки – мой друг.  
Понятно, что в этом рассуждении что-то не так. Но что именно? Тот, кто знаком с логикой, скажет, что в данном случае допущена ошибка, которая называется «нераспределенность среднего термина в простом силлогизме». Пусть вас не пугает это незнакомое и на первый взгляд, сложное выражение. Или такой пример: Во всех городах за Полярным кругом бывают белые ночи.  
Санкт-Петербург не лежит за Полярным кругом. В Санкт Петербурге не бывает белых ночей. Как видим, из двух истинных суждений вытекает ложный вывод. В этом рассуждении тоже есть ошибка. Вряд ли не знакомый с логикой человек сможет сразу же ее найти. А тот, кто владеет логической культурой, немедленно установит причину: «расширение большего термина в простом силлогизме».   
Итак, здравого смысла и жизненного опыта, как правило, достаточно для того, чтобы ориентироваться в различных затруднительных ситуациях. Но если к нашему здравому смыслу и жизненному опыту добавить еще и логическую культуру, то мы от этого только выиграем. Конечно, всех проблем логика не решит, но помочь в жизни она, несомненно, может. В окружающем нас мире существует бесконечное множество различных объектов и свойств, а в нашем сознании они отражаются в виде понятий.  
*Понятие* – это форма мышления, которая обозначает какой-либо объект или его свойство. Например, один объект мы называем горой, другой – небесным телом, третий – растением; одно свойство или признак мы называем мужеством, другой – хитростью. В языке любое понятие выражается в слове или словосочетании, например: дом, осенний лист, первый президент Америки. Здесь может показаться, что понятие и слово – это одно и то же: например, понятие человек выражается в слове человек. Однако понятие и слово – это разные вещи. Понятие – это мысленное обозначение объекта (мысль о нем), а слово – языковое выражение этой мысли. Понятие – форма мышления, а слово – форма языка. Лучше всего это можно уяснить на примере. Понятие человек для представителей всех народов и национальностей – одно и то же: мысленное отражение или обозначение именно человека, а не растения, небесного тела, геометрической фигуры или молекулы. Но понятие человек в разных языках будет выражаться совершенно разными словами. Каждое понятие имеет содержание и объем.  
Содержание понятия – это наиболее важный признак (или признаки) того объекта, который обозначен (выражен) этим понятием. Например, чтобы установить содержание понятия человек надо указать такой признак, который является наиболее важным для человека, который отличает его от всех других существ, объектов и предметов. Такой признак для человека – наличие разума. Следовательно, в содержание понятия человек входит только один важный признак – наличие разума. А в содержание понятия мужчина входит уже два важных признака: наличие разума (этот признак повторяется, потому что любой мужчина – это человек) и принадлежность к определенному полу (к одной из половин человечества; слово пол происходит от слова половина). А если надо установить содержание понятия русский мужчина, то следует указать три важных признака: наличие разума, принадлежность к определенному полу и принадлежность к определенной национальности. Таким образом, содержание понятия может включать в себя как один признак какого-либо объекта (или объектов), так и два или более признаков, причем их число зависит от объекта, который обозначается данным понятием. Но почему в одном случае содержание понятия состоит из единственного признака, а в другом – из множества признаков? На этот вопрос ответить несложно, если знать, что такое объем понятия. Объем понятия – это количество объектов, охватываемых этим понятием, входящих в него. Например, объем понятия человек гораздо больше, чем объем понятия мужчина, потому что мужчин меньше, чем людей вообще. А объем понятия русский мужчина гораздо меньше, чем объем понятия мужчина, потому что русских мужчин на свете намного меньше, чем вообще всех мужчин. И, наконец, объем понятия первый президент России равен единице, потому что включает в себя только одного человека. Точно так же объем понятия город очень широкий, поскольку это понятие охватывает все города в мире, а объем понятия столица меньше объема понятия город, ведь столиц намного меньше, чем городов.  
Объем же понятия нынешняя столица России равен единице, потому что включает в себя один-единственный город.  
Давайте еще раз вернемся к содержанию и объему понятия и вспомним приведенные выше примеры. Какое понятие – человек или мужчина – больше по содержанию? Конечно же, понятие мужчина, потому что его содержание включает в себя два признака: наличие разума и принадлежность к определенному полу, а в содержание понятия человек входит только один признак: наличие разума. А теперь ответим на вопрос: какое понятие – человек или мужчина – больше по объему? Понятие человек больше, потому что оно охватывает гораздо больше объектов, чем понятие мужчина. Таким образом, между объемом и содержанием понятия существует обратное отношение: чем больше содержание понятия, тем меньше его объем, и наоборот. Например, содержание понятия небесное тело является узким, так как включает в себя только один признак – нахождение вне пределов Земли, однако по объему это понятие очень широкое, потому что оно охватывает огромное количество объектов: любая звезда, планета, метеорит, комета – это небесное тело. А понятие Солнце, наоборот, очень узкое по объему, так как включает только один объект, но очень широкое, богатое по содержанию, которое складывается из множества признаков: размер Солнца, его масса, плотность, химический состав, температура, возраст и т. д. Все понятия по объему и содержанию делятся на несколько видов. По объему они бывают единичными (в объем входит только один объект, например: Солнце, город Москва, первый президент России, писатель Лев Толстой), общими (в объем входит много объектов, например: небесное тело, город, президент, писатель) и нулевыми (в объем не входит ни одного объекта, например: Баба-яга, Кощей Бессмертный, Дед Мороз, вечный двигатель, марсианский житель, т. е. понятие существует, а объект, который оно обозначает, не существует). По объему понятия также бывают собирательными (обозначают объекты, которые состоят, собираются из какого-то ограниченного набора элементов, делятся, распадаются на какие-то составные части, например: рота солдат, музыкальный коллектив, волчья стая, созвездие) и несобирательными (обозначают объекты, которые не собираются из какого-то ограниченного набора элементов, не делятся на какие-то составные части, являясь чем-то единым, целым, например: человек, растение, звезда, океан, карандаш). По содержанию понятия бывают конкретными (обозначают какой-либо объект, например: стол, гора, дерево, планета) и абстрактными (обозначают не объект, а признак, свойство, например: мужество, глупость, неряшливость, темнота ). По содержанию понятия также бывают положительными (обозначают наличие чего-либо, например: животное, школа, правда, тактичность) и отрицательными (обозначают отсутствие чего-либо, например: не животное, не школа, неправда, бестактность). Легко заметить, что понятие является отрицательным, когда слово, которым оно выражено, употребляется с частицей не или с приставкой без. Однако если частица не входит в состав слова, которое без нее не употребляется (например: неряха, неряшливость, ненастье, нерадивость, невежество), то понятие, выраженное таким словом, будет положительным. Любому понятию можно дать логическую характеристику, т. е. разобрать его по объему и содержанию. Сначала надо определить, единичным, общим или нулевым оно является, потом установить, собирательное оно или несобирательное, затем выяснить, конкретное оно или абстрактное, и, наконец, ответить на вопрос – положительное оно или отрицательное. Например, понятие Солнце – единичное (потому что в его объем входит только один объект, одно небесное тело), несобирательное (так как Солнце не состоит ни из каких частей, не делится на них), конкретное (ведь Солнце это объект, а не признак или свойство), положительное (потому что этим понятием обозначается наличие, а не отсутствие объекта). Точно так же растение – это понятие общее, несобирательное, конкретное и положительное, а понятие созвездие Ориона – единичное, собирательное, конкретное и положительное. Для любого человека, постоянно необходимо получать новую информацию. Для этого мы читаем литературу, ведет наблюдение, делаем опыты. Именно поэтому необходимо знать о приемах образования понятий. Такими приемами являются: абстрагирование, анализ, синтез, сравнение и обобщение. Абстрагирование – это прием образования понятий, при котором необходимо отвлечься от ряда несущественных признаков предмета, отринуть их и оставить лишь существенные. В процессе абстрагирования значительную роль играет сравнение. Анализ – это мысленное дробление предмета, процесса или явления на составные части с целью установления взаимодействия этих частей и взаимосвязей между ними, а также выявления происходящих внутри исследуемого объекта процессов.  
Анализ необходим для получения отражения уже существующего понятия. Синтез – это мысленная сборка составных частей предмета, явления или процесса воедино.  
Синтез – это процесс, обратный анализу, и обычно используется, когда последний уже проведен. Зачастую мысленному синтезу предшествует, если речь идет о предмете, практическая сборка данного предмета со строгим соблюдением последовательности постановки составных частей.  
*Синтез* применяется для создания новых понятий на основе уже существующих, подвергнутых синтезу, или выявления неточностей в понятии, а также внесения в эти понятия изменений.  
*Сравнение* – это мысленное установление сходства или различия предметов по существенным или несущественным признакам.  
*Обобщение* – мысленное объединение группы предметов в новый ряд или добавление одного предмета в уже существующий на основе присущих этим предметам признаков.  
Сравнение и обобщение позволяют достичь большей точности в суждениях, отделить одно от другого или, наоборот, объединить несколько предметов в одну группу (класс). Как факультативный признак, способствуют лучшему усвоению информации человеческим мозгом.  
Все логические приемы образования понятий имеют важнейшее значение. Они связаны между собой, их невозможно представить один без другого. Часто применяются вместе или предшествуют один другому.  
*Высказывание* - это повествовательное предложение, про которое можно определенно сказать истинно оно или ложно (истина (логическая 1), ложь (логический 0)). *Логические операции* - мыслительные действия, результатом которых является изменение содержания или объема понятий, а также образование новых понятий. Логическое выражение - устное утверждение или запись, в которое, наряду с постоянными величинами, обязательно входят переменные величины (объекты). В зависимости от значений этих переменных величин (объектов) логическое выражение может принимать одно из двух возможных значений: истина (логическая 1) или ложь (логический 0). Сложное логическое выражение - логическое выражение, состоящее из одного или нескольких простых логических выражений (или сложных логических выражений), соединенных с помощью логических операций.  
Основные законы мышления (или законов логики) четыре:   Внешне самым простым из логических законов является *закон тождества.* Он говорит: если высказывание истинно, то оно истинно. Иначе говоря, каждое высказывание вытекает из самого себя и является необходимым и достаточным условием своей истинности. Символически: А → А если А, то А. Например: «Если дом высокий, то он высокий», «Если трава черная, то она черная» и т.п. В приложениях закона тождества к конкретному материалу с особой наглядностью обнаруживается общая черта всех логических законов. Они представляют собой тавтологии, как бы повторения одного и того же и не несут содержательной, «предметной» информации. Это – общие схемы, отличительная особенность которых в том, что подставляя в них любые конкретные высказывания (как истинные, так и ложные), мы обязательно получим истинное выражение. Закон тождества нередко ошибочно подменяется требованием устойчивости, определенности мышления. Действительно, в процессе рассуждения значения понятий и утверждений не следует изменять. Они должны оставаться тождественными самим себе, иначе свойства одного объекта незаметно окажутся приписанными совершенно другому. Если мы начали говорить, допустим, о спутниках как небесных телах, то слово «спутник» должно, пока мы обсуждаем эту тему, обозначать именно такие тела, а не каких-то иных спутников. Требование не изменять и не подменять значения слов в ходе рассуждения, конечно, справедливо. Но, очевидно, что оно не является законом логики. Точно так же, как не относится к ним совет выделять обсуждаемые объекты по достаточно устойчивым признакам, чтобы уменьшить вероятность подмены в рассуждении одного объекта другим.  
Иногда закон тождества неверно истолковывается как один из законов бытия, говорящий о его относительной устойчивости и определенности. Понятый так, он превращается в утверждение, что вещи всегда остаются неизменными, тождественными самим себе. Такое понимание этого закона, конечно, ошибочно. Закон ничего не говорит об изменчивости или неизменности. Он утверждает только, что если вещь меняется, то она меняется, а если она остается той же, то она такой же и остается. В математике есть много подобных «доказательств». В том числе есть и «доказательство» того, что 2\*2=5. Но все эти «доказательства» содержат в себе ошибки, но бывает, что их трудно сразу обнаружить. Ученые такими доказательствами не занимаются. Только шутники, которые неплохо знают математику. То, что 2+2=5 есть много разных «доказательств». Приведу самое простое. Представим равенство: 20-20=25-25. Выносим множители: 4(5-5)=5(5-5) и разделим на общий множитель (5-5). Получим 4=5. Следовательно, 2+2=5. Попробуйте найти здесь ошибку. А всё очень просто. 5-5=0. А в математике делить на ноль нельзя.   
Ещё одно «доказательство». 2+2=5. Преобразуем это равенство 2 \* 1 + 2 \* 1 = 5 \* 1. Распишем 1 как частное равных чисел: Имеем 1 = (5-5)/(5-5). Тогда получим 2 \* (5-5)/(5-5) + 2 \* (5-5)/(5-5) = 5 \* (5-5)/(5-5). Умножим обе части уравнения на(5-5), тогда имеем 2\*(5-5) + 2\*(5-5) = 5\*(5-5) Отсюда получим 0 + 0 = 0. Это доказательство похоже на предыдущее, но лихо закрученное. Здесь также нельзя делить на ноль.

3. *Закон противоречия*: Из всех логических законов самым известным является, без сомнения, закон противоречия. И вместе с тем в истории логики не было периода, когда бы этот закон не оспаривался и когда бы дискуссии вокруг него совершенно затихали. Закон противоречия говорит о противоречащих друг другу высказываниях, т.е. о высказываниях, одно из которых является отрицанием другого. К ним относятся, например, высказывания «Луна – спутник Земли» и «Луна не является спутником Земли», «Трава – зеленая» и «Неверно, что трава зеленая» и т.п. В одном из противоречащих высказываний что-то утверждается, в другом – это же самое отрицается. Идея, выражаемая законом противоречия, проста: высказывание и его отрицание не могут быть вместе истинными.  
Используя вместо высказываний буквы, эту идею можно передать так: неверно, что А и не-А. Неверно, например, что трава зеленая и не зеленая, что Луна – спутник Земли и не спутник Земли и т.п. Закон противоречия выражается формулой: (А&~ А), неверно, что А и не – А. Закон противоречия говорит о противоречивых высказываниях – отсюда его название. Но он отрицает противоречие, объявляет его ошибкой и тем самым требует непротиворечивости – отсюда другое распространенное имя – закон непротиворечия.  
Если применить понятия истины и лжи, закон противоречия можно сформулировать так: никакое высказывание не является вместе истинным и ложным. Иногда закон противоречия формулируют следующим образом: из двух противоречащих друг другу высказываний одно является ложным. Закон противоречия был открыт Аристотелем, сформулировавшим его так: «…невозможно, чтобы противоречащие утверждения были вместе истинными…». Аристотель считал данный закон наиболее важным принципом не только мышления, но и самого бытия: «Невозможно, чтобы одно и то же вместе было и не было присуще одному и тому же и в одном и том же смысле». Несколько раньше формулировка закона как принципа самого реального мира встречается у Платона: «Невозможно быть и не быть одним и тем же». Высказывание и его отрицание должны говорить об одном и том же предмете, рассматриваемом в одном и том же отношении. Эти два высказывания должны совпадать во всем, кроме единственной черты: то, что утверждается в одном, отрицается в другом. Если это забывается, противоречия нет, поскольку нет утверждения и отрицания. Нет противоречия, например, в утверждении «Осень настала и еще не настала», подразумевающем, что хотя по календарю уже осень, а тепло как летом. Его нет и в том, что, как говорит статистика, замужних женщин заметно больше, чем женатых мужчин: при переписи анкета заполняется со слов самого опрашиваемого.  
Появление противоречия в какой-то теории – явный симптом ее неблагополучия. Тем не менее, ученые обычно не спешат расставаться с противоречивой теорией. Более того, они не всегда стремятся исключить противоречие сразу же, как только оно обнаружено. Чаще всего противоречие отграничивается от других положений, входящие в него утверждения проверяются и перепроверяются до тех пор, пока не будет выяснено, какое из них является ложным. В конце концов, ложное утверждение отбрасывается, и теория становится непротиворечивой. Только после этого можно быть уверенным в ее будущем. Чаще всего противоречие довольно легко вскрыть. В начале века, когда автомобилей стало довольно много, в одном из английских графств было издано распоряжение, согласно которому если два автомобиля подъезжают одновременно к пересечению дорог под прямым углом, то каждый из них должен ждать, пока не проедет другой. Это распоряжение внутренне противоречиво, и потому невыполнимо. Противоречие недопустимо в строгом рассуждении, когда оно смешивает истину с ложью. Но, как очевидно уже из приведенных примеров, у противоречия в обычном языке много разных задач.

4. *Закон исключенного третьего*.

Закон исключенного третьего, как и закон противоречия, устанавливает связь между противоречащими друг другу высказываниями. Он утверждает: из двух противоречащих высказываний одно является истинным. Символически: Av – A, А или не – А. Например: «Аристотель умер в 322 г. до н.э. или он не умер в этом году», и т.п. Само название закона выражает его смысл: дело обстоит так, как говорится в рассматриваемом высказывании, или так, как говорится в его отрицании, и никакой третьей возможности нет.  
Как выразил эту мысль Аристотель: «…Не может быть ничего промежуточного между двумя членами противоречия, а относительно чего-то одного необходимо что бы то ни было одно либо утверждать, либо отрицать».

5. *Закон достаточного основания*.

Сущность закона: всякая мысль может быть признана истинной только тогда, когда она имеет достаточное основание, всякая мысль должна быть обоснована.  
Записывается:  
А есть потому, что есть В. В приведенной логической схеме:  
А – это логическое следствие, то есть мысль, которая вытекает из предыдущей мысли; В - логическое основание, то есть мысль, из которой вытекает другая мысль. Закон достаточного основания является отражением всеобщей взаимосвязи, существующей между предметами, явлениями в окружающем мире. Предметы и явления действительности связаны таким образом, что часто знание наличия одного из них может быть основанием для знания другого. Например, увидев в каком-то месте дым, мы делаем вывод о том, что здесь был или имеется очаг возгорания. Русский народ по этому поводу создал пословицу: «Нет дыма без огня». Хотя смысл пословицы сводится к другому, принцип ее создания основан на законе достаточного основания. Поэтому, обосновывая истинность того или иного положения при помощи других положений, мы опираемся на необходимые связи самих предметов, которые отражены в этих положениях.  
Таким образом, достаточное основание – это любая другая мысль, уже проверенная и признанная истинной, из которой с необходимостью вытекает истинность другой мысли.  
И если конкретный вывод претендует на истинность, он обязан строиться на соответствующем, фактическом или логическом, но достаточном основании. Напротив, суждение, опирающееся на недостаточное основание, не может претендовать на истинность. Так, выдвигая обвинение против подсудимого, прокурор должен привести необходимые доказательства, обосновать истинность своего утверждения. В противном случае обвинение будет необоснованным.  
Закон достаточного основания требует обоснованности всякого положения, но он не может указать, каким должно быть конкретное содержание данного основания. Это определяется содержанием соответствующей отрасли знания. Каждая наука, в том числе и юриспруденция, располагает своими средствами, но все логические основания, независимо от характера и специального содержания, должны быть несомненными, фактически достоверными, достаточными. Таковы общие требования к логическим основаниям. Что же касается достаточных оснований, то ими могут быть очевидность, личный опыт, аксиомы, законы наук, теоремы и т.д. Например, истинность некоторых суждений подтверждается путем их непосредственного сопоставления с фактами действительности. Так, для человека, явившегося свидетелем преступления, обоснованием истинности суждения «Н. совершил преступление» будет сам факт преступления, очевидцем которого он был. Но личный опыт ограничен. Поэтому человеку в своей деятельности приходится опираться на опыт других людей, в частности, на показания очевидцев того или иного события. К таким основаниям прибегают обычно в следственной или судебной практике при расследовании преступлений.  
Таким образом, связь логического основания и логического следствия является отражением в мышлении объективных, в том числе и причинно-следственных связей. Однако это отражение не является непосредственным. Поэтому логическую обоснованность нельзя отождествлять с причинно-следственной связью. Например, прошел дождь (причина), и крыши домов стали мокрыми (следствие). Однако в процессе отражения в мышлении реальная причина становится логическим следствием, а реальное следствие становится логическим основанием. И мы рассуждаем таким образом, глядя из окна на улицу: «Крыши домов мокрые (логическое основание), значит – прошел дождь (логическое следствие)».  
Закон достаточного основания несовместим с различными предрассудками и суевериями, которые строятся по схеме: «после этого – значит по причине этого». Эта логическая ошибка возникает в случаях, когда причинная связь смешивается с простой последовательностью во времени, то есть предшествующее явление принимается за его причину. Однако последовательность событий еще не всегда свидетельствует об их причинной связи. Например, черная кошка перебежала дорогу – значит к несчастью, а у англичан, наоборот, – к счастью. Не случайно ряд статей процессуального закона закрепляет требования закона достаточного основания. Так, статья 108 УПК РФ, перечисляя поводы и основания к возбуждению уголовного дела, запрещает возбуждать дело по голословным заявлениям и догадкам: «Дело может быть возбуждено только в тех случаях, когда имеются достаточные данные, указывающие на признаки преступления!». Статья 143 УПК РФ говорит: «Лицо может быть привлечено в качестве обвиняемого только при наличии достаточных доказательств, дающих основание для предъявления обвинения в совершении преступления». Статья 301 УПК РФ указывает, что «приговор суда должен быть законным и обоснованным». Таким образом, фиксируя внимание на суждениях, обосновывающих истинность выдвинутых положений, закон достаточного основания помогает отделить истинное от ложного и прийти к верному выводу.  
Заключение  
Следование законам и принципам формальной логики – это, конечно, безусловная предпосылка правильного и эффективного мышления. Нелогичное мышление представляет собой попросту сумбур и хаос.  
Однако то, на чем настаивает формально-логическая теория, – это всего лишь элементарная дисциплина мышления.  
Искусство правильно мыслить предполагает не только логическую последовательность, но и многое другое. И прежде всего стремление к истине, интеллектуальную честность, творчество и смелость, критичность и самокритичность ума, его неуспокоенность, умение опереться на предшествующий опыт, выслушать и принять другую сторону, если она права, способность аргументированно отстаивать свои собственные убеждения и т.д.  
Логика настолько богата, что о ней можно говорить бесконечно.  
Как советовал Гораций: "Надо сегодня сказать лишь то, что уместно сегодня. Прочее все отложить и сказать в подходящее время". Знание законов и правил – одно из самых ценных наших знаний. Оно делает ум максимально точным и ювелирно тонким в своем анализе. И нельзя упускать возможности углубить это знание и усовершенствовать его практическое применение в нашей работе и повседневной жизни.  
Логические операции и таблицы истинности  
1) Логическое умножение или конъюнкция: **Конъюнкция** - это сложное логическое выражение, которое считается истинным в том и только том случае, когда оба простых выражения являются истинными, во всех остальных случаях данное сложенное выражение ложно. Обозначение: F = A & B. Таблица истинности для конъюнкции

A B F

1 1 1

1 0 0

0 1 0

0 0 0

2) Логическое сложение или дизъюнкция: **Дизъюнкция** - это сложное логическое выражение, которое истинно, если хотя бы одно из простых логических выражений истинно и ложно тогда и только тогда, когда оба простых логических выражения ложны. Обозначение: F = A v B. Таблица истинности для дизъюнкции

A B F

1 1 1

1 0 1

0 1 1

0 0 0

3) Логическое отрицание или инверсия: **Инверсия** - это сложное логическое выражение, если исходное логическое выражение истинно, то результат отрицания будет ложным, и наоборот, если исходное логическое выражение ложно, то результат отрицания будет истинным. Другими простыми слова, данная операция означает, что к исходному логическому выражению добавляется частица НЕ или слова НЕВЕРНО, ЧТО. Обозначение: F = ¬A. Таблица истинности для инверсии

A ¬А

1 0

0 1

4) Логическое следование или импликация: **Импликация** - это сложное логическое выражение, которое истинно во всех случаях, кроме как из истины следует ложь.

То есть данная логическая операция связывает два простых логических выражения, из которых первое является условием (А), а второе (В) является следствием. «A → B» истинно, если из А может следовать B. Обозначение: F = A → B. Таблица истинности для импликации

A B F

1 1 1

1 0 0

0 1 1

0 0 1

5) Логическая равнозначность или эквивалентность:  
**Эквивалентность** - это сложное логическое выражение, которое является истинным тогда и только тогда, когда оба простых логических выражения имеют одинаковую истинность.  
«A ↔ B» истинно тогда и только тогда, когда А и B равны. Обозначение: F = A ↔ B. Таблица истинности для эквивалентности  
A B F

1 1 1

1 0 0

0 1 0

0 0 1

6) Операция XOR (исключающие или) «A ⊕ B» истинно тогда, когда истинно А или B, но не оба одновременно. Эту операцию также называют "сложение по модулю два".  
Обозначение: F = A ⊕ B.

A B F

1 1 0

1 0 1

0 1 1

0 0 0

Порядок выполнения логических операций в сложном логическом выражении

1. Инверсия; 2. Конъюнкция; 3. Дизъюнкция; 4. Импликация; 5. Эквивалентность.

Для изменения указанного порядка выполнения логических операций используются скобки. Таблицы истинности можно составить и для произвольной логической функции F(a, b, c…). В общем случае таблицы истинности имеют размер 2N  строк комбинаций для N  независимых логических переменных.  
Поскольку таблица истинности выражения состоит из строк со всеми возможными комбинациями значений переменных, она полностью определяет значение выражения.  
Законы алгебры логики: Те, кому лень учить эти законы, должны вспомнить алгебру, где знание нескольких способов преобразования позволяет решать очень сложные уравнения. Строго говоря, это не законы, а теоремы. Но их доказательство не входит в программу изучения. Впрочем, доказательство обычно основывается на построении полной таблицы истинности. Замечание. Знаки алгебры логики намеренно заменены на сложение и умножение. №  Для ИЛИ, \/  Для И, &  Примечание:

1 A \/ 0 = A A & 1 = A Ничего не меняется при действии, константы удаляются

2 A \/ 1 = 1 A & 0 = 0 Удаляются переменные, так как их оценивание не имеет смысла

3A \/ B = B \/ A AB = BA Переместительный (коммутативности)  
4 A \/ ¬A = 1   Один из операторов всегда 1  
(закон исключения третьего)

5   A & ¬A = 0 Один из операторов всегда 0 (закон непротиворечия)  
6 A \/ A = A A & A = A Идемпотентности (NB! Вместо A можно подставить составное выражение!)  
7 ¬¬А = A Двойное отрицание

8 (A \/ B) \/ C = A \/ (B \/ C) (A /\ B) /\ C = A /\ (B /\ C) Ассоциативный  
9 (A \/ B)&C=(A&C)\/(B&C) (A&B) \/ C = (A \/ C)&(B \/ C) Дистрибутивный  
10 (A \/ B)&(¬A \/ B) = B (A&B) \/ (¬A&B) = B Склеивания  
11 ¬(A \/ B) = ¬A &¬B ¬(A&B) = ¬A \/ ¬B Правило де Моргана  
12 A \/ (A&C) = A A&(A \/ C) = A Поглощение  
13 A→B = ¬A \/ B и A→B = ¬B→¬A Снятие (замена) импликации  
14 1) A↔B = (A&B) \/ (¬A&¬B) 2) A↔B = (A \/ ¬B)&(¬A \/ B) Снятие (замена) эквивалентности

**занятие 2.**

Раздел I. Элементы теории множеств:

1. Понятие множества и его элементов. Примеры множеств.   
2. Способы задания множеств (перечисление элементов и характеристическое свойство).

3. Операции над множествами (объединение, пересечение, разность). Круги Эйлера-Венна. Формула Грассмана.  
Краткое изложение теоретических вопросов:  
ЛЕКЦИЯ   
1. Понятие множества и его элементов. Примеры множеств.   
Каждый с самого рождения бессознательно пользуется теорией множеств, так же как Мольеров Журден из «Мещанина во дворянстве» разговаривает прозой, сам того не ведая.  
М.Стоун  
В конце XIX века в математической науке возникла необходимость уточнить смысл таких ведущих понятий, как функция, непрерывность и т. д. Для этого нужно было строго определить, что такое натуральное число. Поиски ответа на эти сложные вопросы способствовали развитию новых математических идей, поэтому в конце XIX начале XX столетий происходил пересмотр старых представлений буквально во всех областях математических знаний. В результате в конце XIX века возникла новая область математики – теория множеств, одним из создателей которой был немецкий математик Георг Кантор (1845 – 1918). За небольшой срок теория множеств стала фундаментом всей математики.  
Понятие множества является ключевым в математике, без которого невозможно изложение ни одного из ее разделов. Подсознательно первые представления о множестве у человека начинают формироваться с рождения, когда он погружается в многообразный мир окружающих его объектов и явлений. С первых же шагов мы не просто пополняем список знакомых нам объектов и явлений, а начинаем дифференцировать и классифицировать (горячие и холодные, сладкие и горькие, тяжелые и легкие и т. п.), объединяя тем самым объекты в некоторые совокупности.   
 В математике понятие «множество» используется для описания предметов или объектов. При этом предполагается, что предметы (объекты) данной совокупности можно отличить друг от друга и от предметов, не входящих в эту совокупность.  
 Создатель теории множеств Г. Кантор определил множество как «объединение в одно целое объектов, хорошо различимых нашей интуицией или мыслью», а также «множество есть многое мыслимое нами как единое». Эти слова не могут рассматриваться как математически строгое определение множества, такого определения не существует. Понятие множества относится к исходным (не определяемым), на основании которых строятся остальные понятия математики. Множество – это совокупность каких-либо объектов. Так, можно говорить о множестве всех книг данной библиотеки, множестве всех вершин данного многоугольника, множестве всех натуральных чисел, множестве всех точек данной прямой и т. д. Объекты, входящие в данное множество называются элементами множества. Книги данной библиотеки, вершины данного многоугольника, натуральные числа, точки данной прямой являются элементами соответствующих множеств.  
Множества обычно обозначаются большими буквами A, B, X, а их элементы – малыми буквами а, b, x. Множество называется конечным, если количество его элементов можно выразить целым неотрицательным числом (причем неважно, известно это число или нет, главное, оно существует), в противном случае множество называется бесконечным.  
Пример 1. Множество книг в библиотеке, множество студентов в группе являются конечными. Множество натуральных чисел, множество точек прямой являются бесконечными.  
Количество элементов множества обозначается |A|.  
Пример 2. Пусть В – множество правильных многоугольников. Тогда В = {тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр}. |B|=5. Запись xХ, означает что объект х есть элемент множества Х, читается «х принадлежит множеству Х», «х входит в множество Х». Если х не принадлежит множеству Х, то пишут х Х. Например, если через N обозначим множество натуральных чисел, то 3 N, 20 N, 0 N, N. Если все элементы множества А принадлежат какому-то множеству В, то говорят, что множество А является подмножеством множества В. Записывают А В (множество А содержится во множестве В). Любое множество является подмножеством самого себя, т. е. справедливо утверждение А.  
Если множество не содержит ни одного элемента, то его называют пустым и обозначают символом Ø. Пустое множество является подмножеством любого множества.  
Подмножества, которые содержат не все элементы множества В, называют собственными подмножествами множества В.  
Пример 3. Дано множество М = {a; c; m}. Найти все его подмножества.  
Решение:  
M1 = {a}, M2 = {c}, M3 = {m}, M4 = {a; c}, M5 = {a; m}, M6 = {c; m}, M7 = {a; c; m}, M8 = Ø. Множества M7 и M8 называются несобственными подмножествами множества М.  
Множества А и В называют равными (А = В), если они состоят из одних и тех же элементов, т.е. В=А и А=В.  
Например, множества А = {3, 5, 7, 9} и В = {7, 3, 9, 5} равны, т. к. состоят из одинаковых элементов. Множества, элементами которых являются числа, называются *числовыми*. Примерами числовых множеств являются:  
Ν={1; 2; 3; ...; n; ...} – множество натуральных чисел (чисел, которые используют при счете предметов);  
Ζ0={0; 1; 2; ...; n; ...} – множество целых неотрицательных чисел;  
Ζ={0; ±1; ±2; ...; ±n; ...} – множество целых чисел (натуральные числа и им противоположные);  
Q={:m Z, n N} – множество рациональных чисел (числа, которые можно представить в виде обыкновенной дроби: целые числа, конечные десятичные и бесконечные десятичные периодические дроби); R – множество действительных чисел (рациональные и иррациональные, т.е. бесконечные десятичные непериодические дроби).  
Между этими множествами существует соотношение:   
Множество R содержит рациональные и иррациональные числа. Всякое рациональное число выражается или конечной десятичной дробью, или бесконечной периодической дробью. Так, ½=0,5 (=0,5000…), ⅓=0,333… – рациональные числа.  
Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются иррациональными. Иррациональное число выражается бесконечной непериодической дробью. Например, = 1,4142356…, π = 3,1415926… – иррациональные числа.  
2. Способы задания множеств (перечисление элементов и характеристическое свойство). Понятие множества мы используем без определения. Но как узнать, является та или иная совокупность множеством или не является?  
Считают, что множество определяется своими элементами, т.е. множество задано, если о любом объекте можно сказать, принадлежит он этому множеству или не принадлежит.  
Множество можно задать, перечислив все его элементы. Например, если мы скажем, что множество А состоит из чисел 3, 4, 5, и 6, то мы задали это множество, поскольку все его элементы окажутся перечисленными. При этом возможна запись, в которой перечисляемые элементы заключаются в фигурные скобки: А = {3, 4, 5, 6}. Однако если множество бесконечно, то его элементы перечислить нельзя. Трудно задать таким способом и конечное множество с большим числом элементов. В таких случаях применяют другой способ задания множества: указывают характеристическое свойство его элементов. Характеристическое свойство – это такое свойство, которым обладает каждый элемент, принадлежащий множеству, и не обладает ни один элемент, который ему не принадлежит.  
Рассмотрим, например, множество А двузначных чисел: свойство, которым обладает каждый элемент данного множества, – «быть двузначным числом». Это характеристическое свойство дает возможность решать вопрос о том, принадлежит какой-либо объект множеству А или не принадлежит. Так, число 45 содержится в множестве А, поскольку оно двузначное, а число 145 множеству А не принадлежит, так как оно не является двузначным.  
Случается, что одно и то же множество можно задать, указав различные характеристические свойства его элементов. Например, множество квадратов можно задать как множество прямоугольников с равными соседними сторонами и как множество ромбов с прямым углом. Элементами множества могут быть объекты различной природы (числа, слова, геометрические фигуры, функции, животные  
т.д.). Для математики особую роль играют множества, составленные из математических объектов. Очень часто встречаются числовые множества, т.е. множества, элементами которых являются числа. 245745-189230. Например:  
N - множество натуральных чисел, Z - множество целых чисел, Q - множество рациональных чисел, I - множество иррациональных чисел, R - множество действительных чисел.  
Особое место занимают множества, называемые числовыми промежутками: отрезок [a; b], интервалы (a; b), (a; +∞), (–∞; b), полуинтервалы [a; b), (a; b], [a; +∞), (–∞; b].  
Числовые множества используются при решении уравнений и неравенств.  
В тех случаях, когда характеристическое свойство элементов множества можно представить в символической форме, возможна соответствующая запись множества. Например, множество А натуральных чисел, меньших 7, можно задать так: А = {х| х N и х < 7}. При такой записи буквой х обозначается элемент множества А. Для этих целей можно использовать и другие буквы латинского алфавита.  
Пример 4. Даны множества: М = {2; 3; 5; 7}, N = {-5; -4; -3; -2}, F = {x| x Z, -6 < x< -1}, D = {x| xN, x< 10, x – простое число}. Какие множества равны между собой?  
Решение: Множества F и D заданы характеристическими свойствами. Для того, чтобы сравнить их между собой и с остальными множествами, сформулируем их характеристические свойства словами, а затем зададим их перечислением элементов.  
F – множество целых чисел, больших «-6» и меньших «-1». Этому свойству удовлетворяют числа -5, -4, -3, и -2. Из этих чисел состоит множество N. Значит, F = N.  
D – множество натуральных чисел, которые меньше 10 и являются простыми. Этому свойству удовлетворяют числа 2, 3, 5 и 7. Из этих чисел состоит множество M. Следовательно, D = M.  
3. Операции над множествами (объединение, пересечение, разность). Круги Эйлера-Венна. Как найти все подмножества множеств.  
На простом примере напомним, что называется подмножеством, какие бывают подмножества (собственные и несобственные), формулу нахождения числа всех подмножеств, а также калькулятор, который выдает множество всех подмножеств.  
Пример 1.  Дано множество А = {а, с, р, о}. Выпишите все подмножественные множества.

Решение: Собственные подмножества: {а} , {с} , {р} , {о} , {а, с} , {а, р} , {а, о}, {с, р} , {с, о } ∈, {р, о}, {а, с,р} , {а, с, о}, {с, р, о}. Несобственные: {а, с, р, о}, Ø. Всего: 16 подмножеств.  
Пояснение. Множество A является подмножеством множества B, если каждый элемент множества A содержится также в B.  
• пустое множество ∅ является подмножеством любого множества, называется несобственным;

• любое множество является подмножеством самого себя, также называется несобственным;

• У любого n-элементного множества ровно 2n подмножеств.   
Последнее утверждение является формулой для нахождения числа всех подмножеств без перечисления каждого.  
Вывод формулы: Допустим у нас имеется множество из n-элементов. При составлении подмножеств первый элемент может принадлежать подмножеству или не принадлежать, т.е. первый элемент можем выбрать двумя способами, аналогично для всех остальных элементов (всего n-элементов), каждый можем выбрать двумя способами, и по правилу умножения получаем: 2∙2∙2∙ ...∙2=2n  
Для математиков сформулируем теорему и приведем строгое доказательство.  
Теорема. Число подмножеств конечного множества, состоящего из n элементов, равно 2n .  
Доказательство. Множество, состоящее из одного элемента a, имеет два (т.е. 21) подмножества: ∅ и {a}. Множество, состоящее из двух элементов a и b, имеет четыре (т.е. 22 ) подмножества: ∅, {a}, {b}, {a; b}.Множество, состоящее из трех элементов a, b, c, имеет восемь (т.е. 23 ) подмножеств:∅, {a}, {b}, {b; a}, {c}, {c; a},{c; b}, {c; b; a}.Можно предположить, что добавление нового элемента удваивает число подмножеств. Завершим доказательство применением метода математической индукции. Сущность этого метода в том, что если утверждение (свойство) справедливо для некоторого начального натурального числа n0 и  если  из  предположения,  что  оно  справедливо  для  произвольного  натурального n = k ≥ n0 можно доказать его справедливость для числа k + 1, то это свойство справедливо для всех натуральных чисел.1. Для n = 1 (база индукции) (и даже для n = 2, 3) теорема доказана.2.  Допустим, что теорема доказана для n = k, т.е. число подмножеств множества, состоящего из k элементов, равно 2k.

3. Докажем, что число подмножеств множества B, состоящего из n = k + 1 элемента равно 2k+1.Выбираем некоторый элемент b множества B. Рассмотрим множество A = B \ {b}. Оно содержит k элементов. Все подмножества множества A – это подмножества множества B, не содержащие элемент b и, по предположению, их 2k штук. Подмножеств множества B, содержащих элемент b, столько же, т.е. 2kштук.  
Следовательно, всех подмножеств множества B: 2k + 2k = 2 ⋅ 2k = 2k+1 штук. Теорема доказана. Пересечение множеств.  
Рассмотрим два множества: Х= {0, 1, 3, 5}, Y = {1, 2, 3, 4}.  
Числа 1 и 3 и только они принадлежат одновременно обоим множествам Х и Y. Составленное из них множество {1, 3} содержит все общие для множеств Х и Y элементы.  
Множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих и множеству А, и множеству В, называется пересечением множеств А и В и обозначается А ∩ В. А ∩ В = {х А и х В}.  
Таким образом, множество {1, 3} является пересечением рассмотренных множеств Хи Y:{0, 1, 3, 5} ∩ {1, 2, 3, 4} = {1, 3}. В том случае, когда множества А и В не имеют общих элементов, говорят, что их пересечение пусто и пишут: А∩ В =Ø.  
Пересечение любого множества А с пустым множеством есть пустое множество: А∩ Ø = Ø. Алгебраические операции над множествами и их свойства излагаются обычно с применением кругов Эйлера или диаграмм Венна (или диаграмм Эйлера-Венна). Пересечением множеств А и В, у которых есть общие элементы, будет заштрихованная область. А ∩В

Если множества не имеют общих элементов, то их пересечение будет выглядеть так:

Если одно из множеств является подмножеством другого, то их пересечение будет выглядеть так:

Объединение множеств. Вновь возьмём множества Х= {0, 1, 3, 5} иY = {1, 2, 3, 4} и наряду с ними рассмотрим множество {0, 1, 2, 3, 4, 5}. Это множество содержит все элементы множества Х и все элементы множества Y и не содержит никаких других элементов.  
Множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих или множеству А или множеству В, называется объединением множеств А и В, обозначается А U В. А U В = {х€А или х€ В}  
Итак,{0, 1, 3, 5} {1, 2, 3, 4} = {0, 1, 2, 3, 4, 5}.  
Если изобразить множества А и В при помощи кругов Эйлера, то объединение данных множеств изобразится заштрихованной областью.  
А U В  
Если множества не имеют общих элементов, то их объединение выглядит так:  
А U В  
Если одно из множеств является подмножеством другого, то их объединение будет выглядеть так:  
  
А U В  
Часто приходится рассматривать объединение и пересечение трёх и более множеств. Объединение множеств А, В и С есть множество, каждый элемент которого принадлежит хотя бы одному из множеств А, В или С; пересечение множеств А, В и С есть множество всех элементов, принадлежащих и множеству А, и множеству В, и множеству С.  
А U В U С А ∩ В ∩ С  
Например, объединение множеств остроугольных, тупоугольных и прямоугольных треугольников есть множество всех треугольников.  
Еще операции над множествами можно показать с помощью детского анекдота: Однажды лев, царь зверей, собрал зверей на поляне и повелел им разделиться на умных и красивых. После того, как пыль улеглась, лев увидел на поляне две большие группы зверей и мартышку, прыгающую между ними. На вопрос: почему она прыгает туда-сюда, мартышка ответила: «Что мне, разорваться, что ли?». Так вот, мартышка из анекдота – это пример пересечения умных зверей и красивых. А объединением умных и красивых зверей является все множество зверей.  
Объединение и пересечение множеств обладают многими свойствами, аналогичными свойствам суммы и произведения чисел:  
№ п/п Свойство операций над множествами Свойство арифметических операций Название свойства  
1 a + b = b + a Коммутативность  
2 3 (а+b)+c = a+(b+c) Ассоциативность  
4 5 Дистрибутивность  
Однако эта аналогия не всегда имеет место. Например, для множеств справедливы равенства:  
6 . (А U С) ∩ (В U С) = (A ∩ B) U С.  
7 . А U А = А.  
8. А ∩ А = А.  
Соответствующие равенства для чисел верны не всегда.  
Заметим, что, если в выражении есть знаки пересечения и объединения множеств, и нет скобок, то сначала выполняют пересечение, так как считают, что пересечение более «сильная» операция, чем объединение.  
Вычитание множеств.  
Если заданы два множества, то можно не только найти их пересечение и объединение, но и вычесть из одного множества другое. Результат вычитания называют разностью и определяют следующим образом.  
Разностью множеств А и В называется множество, содержащее все элементы, которые принадлежат множеству А и не принадлежат множеству В, обозначается А \ В. А \ В = {х А и х В}. Х \ Y = {0, 1, 3, 5} \ {1, 2, 3, 4} = {0, 5}. Если мы найдем разность множеств Y и Х, то результат будет выглядеть так: Y \ X = {2; 4}. Таким образом, разность множеств не обладает переместительным (коммутативным) свойством.  
Если изобразить множества АиВ при помощи кругов Эйлера, то разность данных множеств изобразится заштрихованной областью.  
А \ В Если множества не имеют общих элементов, то их разность будет изображаться так: А \ В. Если одно из множеств является подмножеством другого, то их разность будет изображаться так:В\ В. Пересечение – более «сильная» операция, чем вычитание. Поэтому порядок выполнения действий в выражении А \ В ∩ С такой: сначала находят пересечение множеств В и С, а затем полученное множество вычитают из множества А. Что касается объединения и вычитания множеств, то их считают равноправными. Например, в выражении А \ В U С надо сначала выполнить вычитание (из А вычесть В), а затем полученное множество объединить с множеством С. Вычитание множеств обладает рядом свойств:

(А \ В) \ С = (А \ С) \ В.

(А U В) \ С = (А \ С) U (В \ С).

(А \ В) ∩ С = (А ∩ С) \ (В ∩С).

А \ (В U С) = (А \ В) ∩ (А \ С).

А \ (В ∩ С) = (А \ В) U (А \ С).

Дополнение.  
В случаях, когда одно из множеств является подмножеством другого, А \ В называют дополнением множества В до множества А, и обозначают символом В'А . Пусть В А. Дополнением множества В до множества А называется множество, содержащее все элементы множества А, которые не принадлежат множеству В. В А, А \ В = В'А, В'А = {х| х А и х В}. Часто ограничиваются рассмотрением всевозможных подмножеств одного и того же множества, которое в этом случае называют основным или универсальным множеством. Обозначим основное множество буквой E. Для любого множества А, принадлежащего основному множеству Е, справедливы равенства: А U Е = Е, А ∩ Е = А. Множество элементов основного множества Е, не принадлежащих множеству А, называется дополнением множества А до множества Е или просто дополнением и обозначается А'.  
Объединение множестваА и его дополнения А' есть основное множество: А U А' = E.Пересечение множества со своим дополнением пусто: А ∩ А' = Ø. Дополнение пустого множества есть основное множество: Ø' = E, а дополнение основного множества пусто: Е' = Ø. На рисунке основное множество Е схематически изображено в виде прямоугольника, его подмножество А заштриховано, не заштриховано дополнение множества А'.  
Формула Грассмана Теория множеств используется при решении задач следующего вида:  
В группе зверей 15 умных, 13 – красивых, и 8 мартышек (мартышки и умные и красивые). Сколько зверей в группе?  
Решение:  
Пусть U – множество умных зверей, К – множество красивых. Тогда множество мартышек будет обозначаться как , а множество всех зверей –. Значит, |U| = 15, |K| = 13 и = 8. Требуется найти. Так как мартышки входят как в множество умных, так и в множество красивых, то при простом сложении элементов множеств, мы мартышек посчитаем два раза. Тогда из суммы элементов множеств умных и красивых нужно одну часть мартышек вычесть. Получим формулу: Эта формула носит название формулы Грассмана для двух множеств. С помощью этой формулы найдем количество зверей: = 15 + 13 – 8 = 20.

Пример 5. В классе 35 учеников. 20 человек посещают математический кружок, 11 – биологический. 10 человек не посещают кружков. Сколько биологов увлекается математикой?  
Решение:  
Изобразим ситуацию, изложенную в задаче, с помощью кругов Эйлера: |E| = 35, |A| = 20, |B| = 11, |E\(AB)| = 10. Требуется найти, чему равно |AB|. Сначала найдем, чему равно |AB|. |AB| = |E| – |E\(AB)| = 35 – 10 = 25. Теперь подставим известные значения в формулу Грассмана:  
25 = 20 + 11 - |AB|. Выразим из этого уравнения |AB| и найдем, чему оно равно: |AB| = 20 + 11 – 25 = 31 – 25 = 6. Таким образом, 6 учеников увлекаются и биологией, и математикой.

**Занятие 3 ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ**

Решение задач на установление отношений и выполнение операций над множествами.по теме Основные элементы теории множеств.  
**1**. Как называется:  
б) множество лошадей;  
г) множество артистов, работающих в одном театре.  
**2.** Назовите несколько элементов, принадлежащих множеству:  
а) чисел, кратных 7;   
б) квадратов натуральных чисел;  
в) простых чисел, принадлежащих промежутку [25; 43];   
г) чисел, обратных кубам натуральных чисел.  
**3**. Пусть А — множество простых чисел вида 7n + 2, где n ∈ N. Верна ли запись:  
а) 9 ∈ А; б) 23 ∈ А; в) 31 ∉ А; г) 37 ∉ А.   
**4.** Пусть В — множество корней уравнения   
x2 -5x+3 = 0. Верна ли запись:  
а) 0 ∈ В; б) –3 ∉ В; в) 4 ∈ В; г) 3 ∉ В.  
Способы задания множеств  
1. Задайте перечислением элементов множество, заданное характеристическим свойством:  
а) А= x:x∈N, x2+2x-8=0;  
б) B= x:x∈N, 2<x≤825;  
в) C= x:x∈N, x4-5x2+4=0;  
2. В данном множестве все элементы, кроме одного, обладают некоторым свойством. Опишите это свойство и найдите элемент, не обладающий им.  
а) {сумма; разность; множитель; частное};  
б) {4; 16; 22; 27; 30; 34};   
в) {1; 15; 16; 25; 64; 121};  
г) {синий; красный; круглый; бежевый; зеленый};  
3. Исследуйте, принадлежат ли числа 12;- 18; -14 множеству 3757295-146050A=3-2nn2+n;n∈N.  
4. Определите, по какому закону составлено бесконечное множество, содержащее числа:  
а) 6; 2; 23; 29;…;  
б) 15; 38; 511; 714; 911; …;  
г) {2; 6; 12; 20; 30; …};  
5. Задайте характеристическим свойством множества:   
а) всех правильных многоугольников;   
б) параллельных прямых;   
в) всех натуральных чисел, кратных 5.  
6. Какие из следующих множеств пустые:  
а) множество корней уравнения |x – 7| = 7;  
б) множество прямых плоскости, перпендикулярных двум пересекающимся прямым;  
в) множество решений неравенства (x −10)2 ≤ 0 ; г) множество корней уравнения |9 – 5x| = –3;  
д) множество отрицательных корней уравнения |x| = –x.  
Подмножества  
1. Составьте цепочки включений, так чтобы каждое следующее множество содержало предыдущее.  
б) А - множество всех трапеций;  
В -множество всех прямоугольников;  
С -множество всех четырехугольников;   
D - множество всех квадратов;  
E - множество всех параллелограммов;  
F - множество всех многоугольников.  
2. Даны множества:   
А- множество целых чисел;   
В -множество четных чисел;  
С- множество нечетных чисел;   
D - множество чисел, кратных 3;   
E- множество чисел, кратных 6;   
P -множество чисел, кратных 2 и 3 одновременно;  
T - множество чисел, которые при делении на 4 дают в остатке 1.  
Укажите, какие из данных множеств являются подмножествами других множеств, имеются ли среди множеств равные множества? Ответы запишите с помощью символов.  
**ЗАНЯТИЕ 4. Лекция**

Основные комбинаторные конфигурации способы вычисления вероятности событий Основные понятия и термины по теме: Содержание учебного материала:  
1. Понятие комбинаторики, история развития.

2. Основные комбинаторные конфигурации.

3. Правила комбинаторики.

4. Число орбит. Биноминальная формула Ньютона. Треугольник Паскаля

Краткое изложение теоретических вопросов:  
Комбинаторика - это раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.   
Основы комбинаторики очень важны для оценки вероятностей случайных событий, т.к. именно они позволяют подсчитать принципиально возможное количество различных вариантов развития событий. Основная формула комбинаторики (правило произведения): Если для множества А первый элемент можно выбрать m способами из В, второй d способами из В, третий k способами из В и т.д. до последнего n-го элемента для А из В, который можно выбрать f способами, то количество выбора элементов А, выбранного из В будем считать следующим образом: mdkf …n Рассмотрим задачу:

Пример 1. Сколько всех четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 5, 6, 7, 8?

Решение. Для каждого разряда четырехзначного числа имеется пять возможностей, значит N=5\*5\*5\*5=54=625.  
Пример 2. Сколько трехзначных четных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры могут повторяться?  
Решение: n1=6 (т.к. в качестве первой цифры можно взять любую цифру из 1, 2, 3, 4, 5, 6), n2=7 (т.к. в качестве второй цифры можно взять любую цифру из 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6), n3=4 (т.к. в качестве третьей цифры можно взять любую цифру из 0, 2, 4, 6). Итак, N=n1\*n2\*n3=6\*7\*4=168. Пусть имеется k групп элементов, причем i-я группа состоит из ni элементов. Выберем по одному элементу из каждой группы. Тогда общее число N способов, которыми можно произвести такой выбор, определяется соотношением N=n1\*n2\*n3\*...\*nk.

Пример 3. Поясним это правило на простом примере. Пусть имеется две группы элементов, причем первая группа состоит из n1 элементов, а вторая - из n2 элементов. Сколько различных пар элементов можно составить из этих двух групп, таким образом, чтобы в паре было по одному элементу от каждой группы? Допустим, мы взяли первый элемент из первой группы и, не меняя его, перебрали все возможные пары, меняя только элементы из второй группы. Таких пар для этого элемента можно составить n2. Затем мы берем второй элемент из первой группы и также составляем для него все возможные пары. Таких пар тоже будет n2. Так как в первой группе всего n1 элемент, всего возможных вариантов будет n1\*n2. В том случае, когда все группы состоят из одинакового числа элементов, т.е. n1=n2=...nk=n можно считать, что каждый выбор производится из одной и той же группы, причем элемент после выбора снова возвращается в группу. Тогда число всех способов выбора равно nk. Такой способ выбора в комбинаторики носит название выборки с возвращением. Перестановки из n элементов

Определение 3. Перестановками из n элементов называются соединения, которые состоят из одних и тех же n элементов и отличаются одно от другого только порядком их расположения.   
Пример. Всевозможными перестановками множества, состоящего из трех элементов {1, 2, 3} являются: (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 3, 1), (2, 1, 3), (3, 2, 1), (3, 1, 2). Число различных перестановок из n элементов обозначается Pn и вычисляется по формуле Pn=n! Замечание: n!=1\*2\*3\*...\*n (читается: "эн факториал"), кроме того полагают, что 0!=1.

Пример. Сколькими способами семь книг разных авторов можно расставить на полке в один ряд?

Решение: эта задача о числе перестановок семи разных книг. Имеется P7=7!=1\*2\*3\*4\*5\*6\*7=5040 способов осуществить расстановку книг. Число размещений из m элементов по n  
Определение 1. Размещениями из m элементов по n в комбинаторике называются такие соединения, которые состоят из n элементов и отличаются одно от другого либо самими элементами, либо порядком их расположения.  
Пример. Различными размещениями из трех элементов {1, 2, 3} по два будут наборы (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3),(3, 2). Размещения могут отличаться друг от друга как элементами, так и их порядком. Число размещений в комбинаторике обозначается Аnm и вычисляется по формуле:   
Аmn=mm-1m-2…m-n+1=m!m-n!Пример

5. Сколько существует двузначных чисел, в которых цифра десятков и цифра единиц различные и нечетные?  
Решение: т.к. нечетных цифр пять, а именно 1, 3, 5, 7, 9, то эта задача сводится к выбору и размещению на две разные позиции двух из пяти различных цифр, т.е. указанных чисел будет:  
Пример. Для множества {1, 2, 3}сочетаниями являются {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}. Число сочетаний из n элементов по m  
Определение 2. Сочетанием из m элементов по n в каждом называются соединения, которые состоят из n элементов, и которые отличаются по крайней мере одним элементом.   
Число сочетаний обозначается Сnm и вычисляется по формуле: Cmn=m!m-n!∙n! Cmn=AmnPn - формула сочетаний  
Пример. Сколькими способами читатель может выбрать две книжки из шести имеющихся?

Решение: Число способов равно числу сочетаний из шести книжек по две, т.е. равно: число сочетаний:

 Обсуждение. Мы видим, что число возможных комбинаций можно посчитать по разным правилам (перестановки, сочетания, размещения) причем результат получится различный, т.к. принцип подсчета и сами формулы отличаются. Внимательно посмотрев на определения, можно заметить, что результат зависит от нескольких факторов одновременно.  
Во-первых, от того, из какого количества элементов мы можем комбинировать их наборы. Во-вторых, результат зависит от того, какой величины наборы элементов нам  
нужны.  И последнее, важно знать, является ли для нас существенным порядок элементов в наборе. Поясним последний фактор на следующем примере.  
Пример. На родительском собрании присутствует 20 человек. Сколько существует различных вариантов состава родительского комитета, если в него должны войти 5 человек?  
Решение: В этом примере нас не интересует порядок фамилий в списке комитета. Если в результате в его составе окажутся одни и те же люди, то по смыслу для нас это один и тот же вариант. Поэтому мы можем воспользоваться формулой для подсчета числа сочетаний из 20 элементов по 5.  
Иначе будут обстоять дела, если каждый член комитета изначально отвечает за определенное направление работы. Тогда при одном и том же списочном составе комитета, внутри него возможно 5! вариантов перестановок, которые имеют значение. Количество разных (и по составу, и по сфере ответственности) вариантов определяется в этом случае числом размещений из 20 элементов по 5.  
**ЗАНЯТИЕ 5**

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Решение задач на вычисление вероятности событий  
по теме 2.1. Элементы комбинаторики

1. Владимир хочет пригласить в гости троих из семи своих лучших друзей. Сколькими способами он может выбрать приглашенных?  
2. Из группы в 25 человек нужно выделить на дежурство 3 человека. Сколькими различными способами это можно сделать?  
3. В урне находятся 10 белых, 15 черных и 20 красных шаров. Из урны наудачу берутся 9 шаров. Найти:

а) сколькими различными способами можно вынуть 9 шаров? б) сколькими различными способами можно вынуть 9 шаров, среди которых 6 белых и 3 черных?

в) сколькими различными способами можно вынуть 9 шаров, из которых 2 белых, 3 черных и 4 красных шара?

4. Сколько различных двузначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, если цифры в числах могут повторяться?

5. Сколькими способами можно составить букет из пяти цветов, если в наличии имеются цветы трех сортов?

6. На почте имеются марки десяти различных типов. Покупается 15 марок. Сколько существует способов покупки 15 марок?

7. В магазине имеется 7 видов тортов.

а) Сколькими способами можно составить набор, содержащий три торта?

б) А если имеются 3 вида тортов, а нужен набор из семи тортов?  
8. В кондитерской имеется 7 видов пирожных. Сколькими способами можно пробрести в ней:

а) 3 пирожных одного вида?

б) 5 пирожных?

в) Какова вероятность того, что три выбранных наудачу пирожных будут одинаковы?

9. 12 человек прибыли в гостиницу, в которой есть один четырехместный, два трехместных и один двухместный номера. Сколько существует способов их размещения?

10. Пять человек вошли в лифт на первом этаже девятиэтажного дома. Сколькими способами пассажиры могут выйти из лифта на нужных этажах?

11. В коробке лежит 10 красных, 1 зеленая и 2 синие ручки. Из нее наугад вынимается один предмет. Определите, какие из событий более вероятные, какие - менее вероятные: 2 . Колоду из 36 карт хорошо перетасовали и вынули из нее одну карту. Для каждого из следующих событий найдём его вероятность:  
А = {вынули красную масть}; В = {вынули пику}; С = {вынули красную пику}; D = {вынули даму}; Е = {вынули даму пик}.

3. В двух коробках лежат карандаши одинаковой величины и формы, но разного цвета. В первой коробке 4 красных и 6 черных, а во второй 3 красных, 5 синих и 2 черных. Из обеих коробок вынимается наугад по одному карандашу. Какова вероятность того, Что оба карандаша окажутся красными?  
4. Брошена игральная кость. Какова вероятность того, что выпадет четное число очков?

5. Родительский комитет закупил 30 пазлов для подарков детям на окончание учебного года, из них 12 с персонажами мультфильмов и 18 с видами природы. Подарки распределяются случайным образом. Найдите вероятность того, что Маше достанется пазл с персонажем из мультфильма.  
6. На тарелке 15 пирожков: 6 с яблоками, 4 с капустой, 5 с печенью. Варя наугад выбирает один пирожок. Найдите вероятность того, что он окажется с яблоками.

7. На экзамене 40 билетов, Игорь не выучил 2 из них. Найдите вероятность того, что ему попадется выученный билет.  
Решение: Число возможных исходов 40, число благоприятных исходов: 40-2=38. Искомая вероятность равна: 38/40=0,95.  
Ответ: 0,95.

8. При двукратном бросании игрального кубика в сумме выпало 6 очков. Найдите вероятность того, что первый раз выпало меньше трех очков.

9. Марина и Дина бросают кубик по одному разу. Выигрывает та девочка, у которой выпадет больше очков. Первой бросила Марина, у неё выпало 3 очка. Найдите вероятность того, что Дина выиграет.

10. Двое играю в кости – они по разу бросают игральный кубик. Выигрывает тот, у кого больше очков. Если выпадет поровну – ничья. Первый бросил кубик, и у него выпало 4 очка. Найдите вероятность того, что он выиграет.  
Содержание практической работы:

Практическое занятие № 5

11. Монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что первые два броска окончатся одинаково.

12. Монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что только первые два броска окончатся одинаково.

13. При двукратном бросании игрального кубика в сумме выпало 6 очков. Найдите вероятность того, что в первый раз выпало меньше 3 очков.

14. Найдите вероятность того, что при бросании двух кубиков на каждом выпадет менее 4 очков.

15. Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 спортсменов, среди которых 10 участников из России, в том числе Руслан Орлов. Найдите вероятность того, что в первом туре Руслан Орлов будет играть с каким-либо бадминтонистом из России?

16. В классе 7 мальчиков и 14 девочек. 1 сентября случайным образом определяют двух дежурных на 2 сентября. Найдите вероятность того. Что будут дежурить два мальчика.  
17. Перед началом первого тура чемпионата по шашкам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвуют 56 шашистов, среди которых 12 участников из России, в том числе и Валерий Стремянкин. Найдите вероятность того, что в первом туре Валерий Стремянкин будет играть с каким-либо шашистом из России.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ по теме 2.1. Элементы комбинаторики Практическое занятие

1. Владимир хочет пригласить в гости троих из семи своих лучших друзей. Сколькими способами он может выбрать приглашенных?  
2. Из группы в 25 человек нужно выделить на дежурство 3 человека. Сколькими различными способами это можно сделать?  
3. В урне находятся 10 белых, 15 черных и 20 красных шаров. Из урны наудачу берутся 9 шаров. Найти:

а) сколькими различными способами можно вынуть 9 шаров?  
б) сколькими различными способами можно вынуть 9 шаров, среди которых 6 белых и 3 черных?

в) сколькими различными способами можно вынуть 9 шаров, из которых 2 белых, 3 черных и 4 красных шара?

4. Сколько различных двузначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, если цифры в числах могут повторяться?

5. Сколькими способами можно составить букет из пяти цветов, если в наличии имеются цветы трех сортов?  
6. На почте имеются марки десяти различных типов.

Покупается 15 марок. Сколько существует способов покупки 15 марок?  
7. В магазине имеется 7 видов тортов.

а) Сколькими способами можно составить набор, содержащий три торта?

б) А если имеются 3 вида тортов, а нужен набор из семи тортов?  
8. В кондитерской имеется 7 видов пирожных. Сколькими способами можно пробрести в ней:  
а) 3 пирожных одного вида?

б) 5 пирожных?

в) Какова вероятность того, что три выбранных наудачу пирожных будут одинаковы?

9. 12 человек прибыли в гостиницу, в которой есть один четырехместный, два трехместных и один двухместный номера. Сколько существует способов их размещения?  
10. Пять человек вошли в лифт на первом этаже девятиэтажного дома. Сколькими способами пассажиры могут выйти из лифта на нужных этажах?  
**Самостоятельная работа обучающихся:**

Подготовить сообщение - презентацию «Из истории комбинаторики»  
Придумать условие двух комбинаторных задач, используя избранный вид спорта (далее ИВС) и решить их.  
**Основные понятия теории вероятностей**

Основные понятия и термины по теме: Содержание учебного материала:  
1. Предмет теории вероятностей.

2. Основные понятия и определения.

3. Относительная частота события.

4.Определение вероятности события.

5. Теорема сложения вероятностей.

6. Условная вероятность.

7. Независимые события.

8.Теорема умножения вероятностей.

9.Формула полной вероятности.

Краткое изложение теоретических вопросов

**Занятие 6 лекция**

**Правила приближённых вычислений и нахождение процентного соотношения.**

Основные понятия и термины по теме:   
Содержание учебного материала:  
1. Приближенные вычисления. Погрешности. Значащие числа. Округление.

2. Действие над приближенными числами.

3. Абсолютная и относительная погрешности. Точные значащие цифры. Запись приближенных чисел.

4. Правила приближенных вычислений и нахождение процентного соотношения.

5. Графическое представление результатов измерения величин  
Краткое изложение теоретических вопросов:

При решении различных задач нередко приходится вычислять приближенно значения функции, определенного интеграла и др. Незнание правил приближенных вычислений часто приводит к тому, что их результаты оказываются не только неточными, но и ошибочными, настолько они далеки от истинных (точных) значений. При этом многие стремятся удержать больше цифр в окончательном ответе, показать, какой «высокой» степени точности они добились. Точность такого ответа, как правило, оказывается ложной, так как определенное число последних цифр просто ошибочно. Чтобы этого не случилось, необходимо знать и применять правила приближенных вычислений. Ими надлежит пользоваться при выполнении арифметических операций с приближенными числами и для получения приближенного результата.  
Приближенные вычисления. Выполняя вычисления, всегда необходимо помнить о той точности, которую нужно или которую можно получить. Недопустимо вести вычисления с большой точностью, если данные задачи не допускают или не требуют этого (например, семизначная таблица логарифмов при вычислениях с числами, имеющими 5 верных значащих цифр - избыточна). Твёрдое знакомство с правилами приближенных вычислений необходимо каждому, кому приходится вычислять погрешности. Разница между точным числом x и его приближенным значением a называется погрешностью данного приближенного числа. Если известно, что | x - a | < Δa, то величина Δa называется предельной абсолютной погрешностью приближенной величины a.  
Отношение Δa / a = δa называется предельной относительной погрешностью; последнюю часто выражают в процентах.  
Пример:  
3,14 является приближенным значением числа π, погрешность его равна 0,00159..., предельную абсолютную погрешность можно считать равной 0,0016, а предельную относительную погрешность v равной 0.0016/3.14 = 0,00051 = 0,051%. Для краткости обычно слово предельная опускается.  
Значащие цифры: Если абсолютная погрешность величины a не превышает одной единицы разряда последней цифры числа a, то говорят, что у числа все знаки верные. Приближенные числа следует записывать, сохраняя только верные знаки. Если, например, абсолютная погрешность числа 52400 равна 100, то это число должно быть записано, например, в виде 524 .102 или 0,524 .105. Оценить погрешность приближенного числа можно, указав, сколько верных значащих цифр оно содержит. При подсчете значащих цифр не считаются нули с левой стороны числа.

Примеры: 1 куб.фут = 0.0283 м3 - три верных значащих цифры;  
1 дюйм = 2,5400 v пять верных значащих цифр. Если число a имеет n верных значащих цифр, то его относительная погрешность δa Τ 1/(z\*dn-1), где z - первая значащая цифра числa a; d - основание системы счисления. У числа a с относительной погрешностью δa верны n значащих цифр, где n - наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству (1+Z)δa Τ dl-n.

Пример: Если число a = 47,542 получено в результате действий над приближенными числами и известно, что δa = 0,1%, то a имеет 3 верных знака, так как (4+1)0,001 Τ 10v2.   
Округление. Если приближенное число содержит лишние (или неверные) знаки, то его следует округлить. При округлении сохраняются только верные знаки; лишние знаки отбрасываются, причем если первая отбрасываемая цифра больше или равна d/2, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу. При округлении возникает дополнительная погрешность, не превышающая половины единицы разряда последней значащей цифры округленного числа. Поэтому, чтобы после округления все знаки были верны, погрешность до округления должна быть не больше половины единицы того разряда, до которого предполагают делать округление.

Действия над приближенными числами. Результат действий над приближёнными числами представляет собой также приближённое число. Погрешность результата может быть выражена через погрешности первоначальных данных при помощи следующих теорем: Предельная абсолютная погрешность алгебраической суммы равна сумме предельных абсолютных погрешностей слагаемых. Относительная погрешность суммы заключена между наибольшей и наименьшей из относительных погрешностей слагаемых.  
Относительная погрешность произведения или частного равна сумме относительных погрешностей сомножителей или, соответственно, делимого и делителя. Относительная погрешность n-ой степени приближенного числа в n раз больше относительной погрешности основания (как у целых, так и для дробных n).  Пользуясь этими теоремами, можно определить погрешность результата любой комбинации арифметических действий над приближенными числами.  
Примеры:  
V = r2hDv = Vd v = V(2d r+d n) Предельная абсолютная погрешность заведомо превосходит абсолютную величину истинной погрешности, поскольку предельное значение вычисляется в предположения, что различные погрешности усиливают друг друга; практически это бывает редко. При массовых вычислениях, когда не учитывают погрешность каждого отдельного результата, пользуются следующими правилами подсчета цифр. При соблюдении этих правил можно считать, что в среднем полученные результаты будут иметь все знаки верными, хотя в отдельных случаях возможна ошибка в несколько единиц последнего знака. При сложении и вычитании приближённых чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближённом данном с наименьшим числом десятичных знаков.  
При умножении и делении в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет приближённое данное с наименьшим числом значащих цифр.  
При возведении в квадрат или куб в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет возводимое в степень приближённое число (последняя цифра квадрата и особенно куба при этом менее надежна, чем последняя цифра основания). При увеличении квадратного и кубического корней в результате следует брать столько значащих цифр, сколько их имеет приближённое значение подкоренного числа (последняя цифра квадратного и особенно кубического корня при этом более надёжна, чем последняя цифра подкоренного числа). Во всех промежуточных результатах следует сохранять одной цифрой более, чем рекомендуют предыдущие правила. В окончательном результате эта запасная цифра отбрасывается.  
Если некоторые данные имеют больше десятичных знаков (при сложении и вычитании) или больше значащих цифр (при умножении, делении, возведении в степень, извлечении корня), чем другие, то их предварительно следует округлить, сохраняя лишь одну лишнюю цифру.  Если данные можно брать с произвольной точностью, то для получения результата с K цифрами данные следует брать с таким числом цифр, какое даёт согласно правилам 1-4(К+1) цифру в результате.  
Правило. Чтобы найти процентное отношение двух чисел, нужно одно число разделить на другое, а результат умножить на 100. Например, вычислить, сколько процентов составляет число 52 от числа 400. По правилу: 52 : 400 \* 100 — 13 (%).  
Обычно такие отношения встречаются в задачах, когда величины заданы, а нужно определить, на сколько процентов вторая величина больше или меньше первой (в вопросе задачи: на сколько процентов перевыполнили задание; на сколько процентов выполнили работу; на сколько процентов снизилась или повысилась цена и т. д.).

**Занятие 7 ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ**

По теме Приближенные вычисления и процентное соотношение. Содержание практической работы:  
**1**. Завод должен был за месяц изготовить 1 200 изделий, а изготовил 2 300 изделий. На сколько процентов завод перевыполнил план?

1-й вариант Решение:1 200 изделий — это план завода, или 100% плана.1) Сколько изделий изготовил завод сверх плана? 2 300 — 1 200 = 1 100 (изд.)

2) Сколько процентов от плана составят сверхплановые изделия?1 100 от 1 200 => 1 100 : 1 200 \* 100 = 91,7 (%).  
2-й вариант Решение:1) Сколько процентов составляет фактический выпуск изделий по сравнению с плановым?2 300 от 1 200 => 2 300 : 1 200 \* 100 = 191,7 (%).  
2) На сколько процентов перевыполнен план?191,7 — 100 = 91,7 (%)Ответ: на 91,7%.

**2**. Урожайность пшеницы в хозяйстве за предыдущий год составила 42 ц/га и была занесена в план следующего года. В следующем году урожайность снизилась до 39 ц/га. На сколько процентов был выполнен план следующего года?  
1-й вариант Решение: 42 ц/га — это план хозяйства на этот год, или 100% плана.

1) На сколько снизилась урожайность по сравнениюс планом?42 — 39 = 3 (ц/га)

2) На сколько, процентов план не довыполнен?3 от 42 => 3 : 42 \* 100 = 7.1 (%).

3) Насколько процентов выполнен план этого года?  
100 — 7,1 = 92,9 (%)

2-й вариант Решение:1) Сколько процентов составляет урожайность этого гола по сравнению с планом?39 от 42 39 : 42 • 100 — 92,9 (%).Ответ: 92,9%.

**3**. Измеряют размер некоторой детали с точностью до 0,01 мм. По таблице допусков  она должна иметь размер d=(50 ± 0,02) мм. Будут ли приняты детали размером 49,99; 50,01;50,03мм?   
4. Дано число 3/7

а) Представьте его в виде десятичной дроби с точностью до 0,001.   
в) Найдите абсолютную погрешность приближения

5. Даны приближённые числа: 1678 ± 6; 6,12 ± 0,07; 7,028 ± 0,08; 27,246 ± 0,

а) Укажите их верные цифры.

б) Округлите третье число, сохранив в нём только верные цифры, укажите его точность.

Вариант 1.

1. Дано число 359 .

а) Представить его в виде десятичной дроби с точностью до 0,001

б) Найдите относительную погрешность приближения.   
2. Вычислите:

а) с точностью до 0,001: 2,3913718,192 5,2578 – 8,429;

б) 2,3913718,192 с относительной погрешностью, не превышающей 0,02.

3. Ускорение свободного падения равно (9,81 ±0,05) м/с2, нормальное атмосферное давление (101326±2) Н/м2. Что измерено с большей точностью?

Вариант 2.   
1. Дано число 67 .

а) Представить его в виде десятичной дроби с точность 0,001.   
в) Найдите относительную погрешность приближения.

2. Вычислите :

а) с точностью до 0,001: 3,7134524,237 6,7213 -12,341.

в) 3,7134524,237 с относительной погрешностью, не превышающей 0,03.

3. Точка кипения ацетона равна 56,2(±0,05)ºС, а коэффициент поверхностного натяжения ацетона – (0,024 ±0,0003) Н/м. Что измерено с большей точностью?

Вариант 3.

1. Дано число 249 .

а) Представьте его в виде десятичной дроби с точностью до 0,001   
б) Найдите относительную погрешность приближения.   
2. Вычислите:

а) с точностью до 0,001: 6,4283114,582 5,3987 + 17,854 ;   
в) 6,4283114,582 с относительной погрешностью, не превышающей 0,05.

3. Масса железнодорожного вагона ( 63 ±0,5) т., а масса дозы лекарств (0,15±0,005) г. Что измерено с большей точностью?  
Содержание практической работы:  
Практическое занятие

Вариант 1.

1. Размер некоторой детали измеряют с точностью до 0,01мм. По таблице допусков она должна иметь размер d=(35,00±0,03) мм. Будут ли приняты детали размером 34,98; 35,03; 34,95 мм?

2. Дано число 56

а) Представьте его в виде десятичной дроби с точностью дот 0,001.

б) Найдите абсолютную погрешность приближения.

3. Даны следующие приближённые числа: 72345±27; 2,874±0,003; 28,70±0,01; 3,285±0,05.

а) Укажите верные цифры этих чисел.

б) Округлите последнее число, сохранив в нём только верные цифры, укажите его точность  
Вариант 2.

1. Дано число 57 .

а) Представьте его в виде десятичной дроби с точностью до 0,001.   
б) Найдите относительную погрешность приближения.

2. Вычислите:

а) с точностью до 0,001: 5,1279313,875 8,1293 + 39,938.   
б) 5,1279313,875 с относительной погрешностью, не превышающей 0,03.

3. Температура плавления равна 660,4 (±0,006)ºС, а плотность сухого воздуха (1,1273 ± 0,0003) кг/м3. Что измерено с большей точностью?

Самостоятельная работа обучающихся: Составить задачи практического содержания, связанных с профессиональной деятельностью на применение правил приближенных вычислений и нахождение процентного соотношения. Представить результат графически.

**Занятие 10 ЛЕКЦИЯ**

Методы математической статистики.

2. Основные виды измерительных шкал.

3. Меры центральной тенденции (средние величины)

4. Математическая статистика в физической культуре и спорте.  
Краткое изложение теоретических вопросов: Теоретические сведения к практической работе.

Базовым понятием теории вероятностей является вероятностное пространство, которое включает множество элементарных исходов:, σ-алгебру Λ событий и вероятностную меру P. В качестве множества элементарных исходов может выступать любое конечное, счетное или континуальное множество =. Алгебра событий есть некоторое множество, состоящее из подмножеств множества = и удовлетворяющее определённым условиям, которые мы приводить не будем. Функция P: Λ → R называется вероятностной мерой, если: 1) ∀A ∈ Λ,P(A) ≥ 0 ,  
P(∅) = 0 , P(Ω) = 1 Для попарно несовместных (непересекающихся) Аi∈ Λ, P i=1∞Ai= i=1∞P(Ai) **Случайной** величиной X = X (ω) называется измеримая функция : Ω →R . Измеримость здесь означает существование функции распределения F (x) = P(X (ω) < x). Для пояснения содержательного смысла введённых понятий рассмотрим пример. Предположим, что исследуется концентрация яда в железах змей некоторого вида. Для этого ловится определённое количество змей и изучается их яд.  
этом случае множество всех змей заданного вида можно отождествить с множеством =, а конкретную пойманную змею с элементарным исходом ω. Факт поимки определённой змеи является случайным событием. Событие – это подмножество исходов, поэтому рассматриваем подмножество, состоящее из одной змеи. Считаем, что для каждой змеи существует (определена) вероятность быть пойманной.  
Поскольку концентрация яда – это функция змеи, она так же случайна. Для любого числа x можно определить вероятность того, что концентрация яда в железах случайной пойманной змеи не превзойдёт x. Эта вероятность, по определению, есть значение функции распределения в точке x. Важным моментом является то, что = – это множество не только реально существующих змей, но и всех змей, которые, по нашим представлениям, могли бы существовать. Такое соглашение нужно для того, чтобы иметь возможность оперировать с непрерывными случайными величинами. В противном случае, если рассматривать только существующих змей, то множество = будет конечным, а все функции на этом множестве, в том числе случайные величины, — дискретными.  
При пользовании данным пособием читатель может под случайной величиной понимать просто некоторую переменную X, для которой определена функция распределения. При этом под функцией распределения достаточно понимать некоторую функцию F(x), такую что:

F (− ∞) = 0; F (∞) = 1; ∀a ≤ b, P(a ≤ X < b) = F (b)− F (a) ≥ 0 ;  
∀a , F (a − 0) = F (a). Величина P(a ≤ X < b) есть вероятность1 попадания случайной величины X в интервал [a, b).  
Для системы случайных величин X1,..., X n определена совместная функция распределения F (x1,..., xn ) = P(X1 < x1,..., X n < xn ). В математической статистике важную роль играют независимые случайные величины. Случайные величины называются независимыми, если их совместная функция распределения удовлетворяет условию F (x1 ,..., xn ) = F1 (x1 )⋅ ...⋅ Fn (xn ). Под выборкой понимается набор значений (x1,..., xn ), полученных как n независимых реализаций случайной величины X. Число n называется объёмом выборки. Например, случайной величиной может являться измеряемое значение некоторой физической величины, тогда в качестве выборки будут выступать результаты n независимых измерений. Историческом значении термин «выборка» подразумевает выборку из так называемой генеральной совокупности. В примере со змеями генеральной совокупностью является множество всех змей, которых мы потенциально можем поймать, а выборку составляют фактически пойманные змеи. Заметим, что термин «генеральная совокупность» для нас не актуален, т.е. мы его не будем в дальнейшем использовать. Для простоты можно отождествлять генеральную совокупность с множеством элементарных исходов. В рамках пособия свойство 3) можно использовать вместо определения вероятности.  
В примере со змеями можно было бы генеральной совокупностью назвать множество реально существующих змей, но вряд ли такое понятие полезно для решения задач статистики. Дело в том, что фактически выборка производится, конечно, из множества реально существующих змей, но, поскольку мы не можем это множество описать и задать, приходится идеализированно считать, что выборка производится из множества «возможных» змей. Кроме того, сама совокупность реально существующих змей фактически является случайной выборкой из множества змей, которые потенциально могут появиться, поскольку рождение конкретной змеи — результат комбинации случайных факторов (полученный генетический материал, внешние условия).  
Итак, под выборкой мы будем понимать просто набор случайных значений (реализаций) случайной величины и называть его выборкой из распределения. Под набором мы здесь понимаем упорядоченную последовательность. Это может показаться неожиданным, поскольку на практике порядок значений в выборке, как правило, не важен. Например, если мы перемешаем пойманных змей в клетке, либо переставим результаты измерений свойств их яда — выводы не должны измениться. Тем не менее, выборку мы должны записывать как последовательность значений, а не как множество. В математической статистике рассматриваются задачи, обратные по отношению к задачам теории вероятностей. Если в задачах теории вероятностей по известным распределениям вычисляются вероятности тех или иных событий, то в математической статистике по фактам наступления некоторых событий делаются выводы о распределениях.  
Исходно имеется выборка, полученная в результате n-кратного повторения эксперимента. Распределение F(x) , которому подчиняются наблюдения, неизвестно. Требуется на основе информации, заложенной в выборке, насколько это возможно, восстановить закон распределения F(x). Достоверно восстановить распределение, имея лишь n реализаций случайной величины, невозможно, и любые выводы в этом случае будут носить вероятностный характер.  
Основные задачи математической статистики следующие:  
1) восстановление закона распределения непараметрическими методами;  
2) оценивание параметров распределения (параметрические методы);  
3) проверка состоятельности гипотезы о законе распределения. Для решения поставленных задач математическая статистика располагает рядом процедур и методов.  
Непараметрический подход включает такие способы восстановления распределения, как построение эмпирической функции распределения и гистограммы, а также множество методов (потенциальных функций и др.), не рассматриваемых в данном пособии. Представителями параметрических методов являются методы моментов и максимального правдоподобия для оценки параметров распределения. Некоторые другие методы читатель может найти в литературе. Также будет рассмотрено интервальное оценивание параметров распределения.

Гистограмма  
Помимо приближения для функции распределения, по выборке можно построить приближения для неизвестной плотности распределения. Простейшим из таких приближений является гистограмма, которую можно использовать как самостоятельно, так и на предварительных этапах обработки данных. Восстанавливать распределение с помощью гистограммы можно, если число наблюдений достаточно велико (на практике требуется не менее пятидесяти выборочных точек). Если число наблюдений невелико, то лучше использовать иные методы обработки данных, например, построить эмпирическую функцию распределения.  
Для построения гистограммы в выборке (x1,..., xn) объема n находятся наименьшее xmin и наибольшее xmax наблюдаемые значения.  
Затем диапазон [xmin,xmax] наблюдаемых значений разбивается на несколько интервалов, которые могут быть как одинаковыми, так и разными по длине. Далее будут рассматриваться только одинаковые интервалы [si , si +1) длины Δ = si+1 − si = xmax-xminl, где l есть число интервалов. В соответствии с обозначениями s1= xmin, sl+1=xmax. Для определенности считаем, что левые границы строго включены в интервалы, а правые нестрого. Если значение из выборки совпадает с левой границей, то оно входит в интервал, если совпадает с правой

i 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

(si ,si+1) [10,14) [14,18) [18,22) [22,26) [26,30) [30,34) [34,38) [38,42) [42,46) [46,50]

ni 6 7 11 17 19 18 13 5 3 1~pi 0.06 0.07 0.11 0.17 0.19 0.18 0.13 0.05 0.03 0.01 ~pi

Δ xi 0.015 0.0175 0.0275 0.0425 0.0475 0.045 0.0325 0.0125 0.0075 0.0025

Краткое изложение теоретических вопросов:   
1. Понятие о статистике. Основные характеристики математической статистики:  медиана, мода, размах ряда данных, математическое ожидание. СТАТИСТИКА – это наука, которая занимается получением, обработкой и анализом количественных данных о разнообразных явлениях, происходящих в природе и обществе. Одна из основных задач статистики состоит в надлежащей обработке информации. У статистики есть много других задач: получение и хранение информации, выработка различных прогнозов, оценка их достоверности и т. д. Ни одна из этих целей не достижима без обработки данных.  МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА — раздел математики, посвященный методам и правилам обработки и анализа статистических данных — среднее значение случайной величины. Средним арифметическим ряда чисел называется частное от деления суммы этих чисел на их количество. Среднее арифметическое является важной характеристикой ряда чисел, но иногда полезно рассматривать и другие средние.

Модой называют число ряда, которое встречается в этом ряду наиболее часто. Мода – показатель, который широко используется в статистике. Одним из наиболее частых использований моды является изучение спроса. Заметим, что в рядах, рассматриваемых в реальных статистических исследованиях, иногда выделяют больше одной моды. Когда в ряду много данных, то интересными бывают все те значения, которые встречаются гораздо чаще других. Их статистики тоже называют модой. Одним из статистических показателей различия или разброса данных является размах.

Размах — это разность между наибольшим и наименьшим значениями ряда данных. Еще одной важной статистической характеристикой ряда данных является его медиана. Обычно медиану ищут в случае, когда числа в ряду являются какими-либо показателями и надо найти, например, человека, показавшего средний результат, фирму со средней годовой прибылью, авиакомпанию, предлагающую средние цены на билеты, и т. д. Медианой ряда, состоящего из нечетного количества чисел, называется число данного ряда, которое окажется посередине, если этот ряд упорядочить. Медианой ряда, состоящего из четного количества чисел, называется среднее арифметическое двух стоящих посередине чисел этого ряда.

2. Столбчатые, круговые диаграммы — графическое представление данных, позволяющее быстро оценить соотношение нескольких величин. Представляет собой геометрическое символьное изображение информации. Классическими диаграммами являются столбчатые и линейные диаграммы. Также они называются гистограммами. Столбчатые диаграммы в основном используются для наглядного сравнения полученных статистических данных или для анализа их изменения за определѐнный промежуток времени. Построение столбчатой диаграммы заключается в изображении статистических данных в виде вертикальных прямоугольников или трѐхмерных прямоугольных столбиков. Каждый столбик изображает величину уровня данного статистического ряда. Все сравниваемые показатели выражены одной единицей измерения, поэтому удаѐтся сравнить статистические показатели данного процесса. Достаточно распространѐнным способом графического изображения структуры статистических совокупностей является секторная диаграмма, так как идея целого очень наглядно выражается кругом, который представляет всю совокупность. Относительная величина каждого значения изображается в виде сектора круга, площадь которого соответствует вкладу этого значения в сумму значений. Этот вид графиков удобно использовать, когда нужно показать долю каждой величины в общем объѐме. Сектора могут изображаться как в общем круге, так и отдельно, расположенными на небольшом удалении друг от друга. Круговая диаграмма сохраняет наглядность только в том случае, если количество частей совокупности диаграммы небольшое.   
Если частей диаграммы слишком много, еѐ применение неэффективно по причине несущественного различия сравниваемых структур. Недостаток круговых диаграмм — малая ѐмкость, невозможность отразить более широкий объѐм полезной информации

**ЗАНЯТИЕ 11** **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ**:

решение задач профессиональной направленности.

Содержание практической работы:

1.Задача «За контрольную работу по математике были получены следующие оценки: «5» - 6 человек, «4» - 12 человек, «3» - 6 человек. Определите средний балл за   
контрольную, моду, медиану, размах. Изобразите, как распределились оценки на  круговой и столбчатой диаграммах».   
2. Задача Саша в третьей четверти по математике получил следующие отметки: 4, 3, 3, 5, 5, 4, 5, 3, 2, 4, 5. Какую отметку Саша должен получить за четверть?

1) Найдите медиану ряда. Ранжируйте последовательность чисел в порядке возрастания. Найдите среднее число в ранжированном ряду – медиану ряда.

2) Найдите моду ряда - отметку, которая встречается чаще всего в ранжированном ряду.

3) Найдите размах ряда – разность между наибольшим и наименьшим числом  ряда.

4) Найдите математическое ожидание ряда – среднее арифметическое значений  ряда данных.

3. Через каждый час измерялось напряжение тока в электросети. При этом были получены следующие значения (В):  
227 219 215 230 232 223 220 222 218 219 222 221 227 226 226 209 211 215 218 220 216 220 220 221 225 224 212 217 219 220.  
Построить статистическое распределение и начертить полигон.  
4. Наблюдения за сахаром крови у 50 человек дали такие результаты: 3.94 3.84 3.86 4.06 3.67 3.97 3.76 3.61 3.96 4.04  
3.82 3.94 3.98 3.57 3.87 4.07 3.99 3.69 3.76 3.71  
3.81 3.71 4.16 3.76 4.00 3.46 4.08 3.88 4.01 3.93  
3.92 3.89 4.02 4.17 3.72 4.09 3.78 4.02 3.73 3.52  
3.91 3.62 4.18 4.26 4.03 4.14 3.72 4.33 3.82 4.03  
Построить по этим данным интервальный вариационный ряд с равными интервалами (I- 3.45-3.55; II - 3.55-3.65 и т. д.) и изобразить его графически, начертить гистограмму.   
Для выполнения заданий использовать данные из таблицы.  
Построить график эмпирической функции распределения.

Построить график функции распределения.  
Найти оценку математического ожидания, а также несмещённые оценки дисперсии при известном и неизвестном математическом ожидании.  
Построить доверительные интервалы для математического ожидания и стандартного отклонения при известном и неизвестном втором параметре соответственно.  
№ n выборка η m σ 0 12 1,8; 2; 3,3; 2,6; 1,3; -4; 0,5; 0,7; -0,7; 5,1; 5,7; 2 0,9 1,5 2,5 1 15 -6; -4,4; -2; -7,6; -0,4; 0,1; -3,7; -5,4; 0,8; -3,9; -5,3; -0,3; -4,8; -8,6; -0,9 0,95 -4 2 2 10 25; 27; 25; 20; 30; 25; 20; 23; 26; 22 0,9 25,2 3,4  
3 12 -93; 52; 192; 79; 150; 102; -147; -165; -16; 105; 144; 162 0,95 10,5 102,14 14 73; -16; -66; 38; -85; -11; 24; 93; 112; 1; 15; 36; -7; 70 0,99 14 455 11 0; 9; 2,4; -1,7; 5; 5,4; 3,4; 5,7; 12,5; 4,5; 6,9 0,9 5 56 10 3,2; -0,5; 2; 1,6; 1,1; 2,7; 1,6; 0; 1,7; 4,8 0,9 1 2  
7 12 8,33; 8,36; 8,23; 8,42; 7,95; 8,16; 8,32; 8,21; 8,27; 8,08; 8,09; 8,02 0,95 8,2 0,18 10 0,108; 0,093; 0,11; 0,117; 0,12; 0,089;0,113; 0,111; 0,092; 0,091 0,9 0,1 0,019 15 -0,87; 0,4; -2,7; -0,01; 1,25; -0,9; 0,58; -0,61; 1,25; -1,04; -0,62; -0,19; -0,16; 0,95 0 1,4  
2,31; 1,05 10 11 298; 322; 331; 346; 299; 337; 318; 313; 329; 304; 317 0,9 315 1711 17 25; 29; 19; 26; 23; 16; 20; 22; 24; 18; 18; 30; 19; 26; 24; 24; 19 0,99 22 412 12 102; 39; -111; 87; 150; -76; 164; 151; 60; 127; 149; 94 0,9 100 10013 10 -1,38; -2,21; -0,8; -0,1; 0,21; -0,54; -0,98; -3,05; -0,08; -0,19 0,9 -1 114 14 0,75; 0,34; 0,8; 0,86; 0,55; 0,43; 0,34; 0,84; 1,04; 0,58; 1,25; 0,76; 0,82; 1,16 0,95 0,8 0,2515 11 -1,56; -1,73; -1,72; -1,54; -0,7; -1,58; -1,04; -1,18; -1,83; -1,51; -1,99 0,95 -1,5 0,316 12 3,59; 2,48; 2,35; 3,94; 3,58; 2,99; 3,75; 3,42; 3,33; 3,97; 2,98; 4,15 0,9 3,3 0,517 15 9,4; 7,3; 9,4; 8,4; 8,7; 5,7; 6,3; 5,3; -1,2; 5,2; 3,6; 4,3; 11,5; 6,5; 8,2 0,95 7 318 17 0,7; 1,4; -0,7; -1,5; 0,1; -0,1; -1; 0,1; 1,4; 0,9; -0,8; -0,3; 3; 0,3; -0,7; 0,1; 1,2 0,9 0 119 11 19,2; 20,1; 20,6; 19,4; 19,7; 19,1; 19,9; 18,7; 20,2; 19,8; 19,4 0,9 19,5 0,920 10 39,3; 21; 33,8; 34,9; 27,9; 20,6; 42,9; 30,2; 22,2; 23 0,9 32,2 7,321 10 20,5; 8,2; 20;12,6; 14,1; 13,4; 12,1; 16; 19,9; 19,4 0,9 12 522 12 -9,9; -12,9; -11,7; -11,6; -12,3; -12; -12,7; -11,3; -15,7; -9,5; -10,4; -13,1 0,95 -12 223 15 416; 381; 383; 419; 428; 408; 397; 393; 400; 413; 405; 409; 404; 404; 400 0,9 400 2024 12 59; 60; 70; 69; 63; 62; 71; 69; 67; 67; 76; 58 0,95 65 6,525 11 -3; 7; 6; 3; 18; 3; 19; 7; 5; 0; 25 0,9 9 1226 12 -20; 79; 18; 57; 10; 94; -48; 3; -16; 115; 88; -8 0,95 -5 10027 15 0,16; -0,09; 0,05; -0,1; 0,23; -0,18; 0,11; -0,11; 0,08; 0,09; 0,06; 0,11; -0,27; - 0,99 0 0,150,1; 0,18 28 12 0,4; -13,5; 4,3; -4,8; -4,5; -2,5; -3,9; 0,9; 2,3; -4; -11,6; 6,7 0,9 -1 5  
29 10 87; 96; 77; 91; 82; 92; 80; 111; 81; 84 0,9 90 10  
30 11 68; 126; -60; 89; 15; -65; -59; -99; 19; 66; 26 0,95 50 100

Информационное обеспечение обучения  
Основные источники:

Башмаков М.И.Математика: учебник для студ. учреждений сред.проф. Образования – 9-е изд.,стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2014. – 256с.

Башмаков М.И. Математика. Сборник задач профильной направленности: учебное пособие для учреждений сред.проф. Образования – 5-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2014. – 208с.

Башмаков М.И. Математика. Задачник: учебник для студ. учреждений сред.проф. Образования – 9-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2014. – 416 с.

Башмаков М.И. Математика. Книга для преподавателей: методическое пособие для СПО. 2-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2014. – 224с.  
Пехлецкий И. Д. Математика: учебник для студ. образоват. учреждений сред.проф. образования / И. Д. Пехлецкий. – М., 2013. – 304 с.

Дополнительные источники:

Бродский Я. С. Статистика. Вероятность. Комбинаторика / Я. С. Бродский. −М., 2007.

Спирина М. С. Теория вероятностей и математическая статистика:учебник для студ. учреждений сред.проф. образования / М. С. Спирина, П. А. Спирин. – М., 2013. – 352 с.

Стойлова.Л.П. Математика. Учебное пособие для студентов средних педагогических учебных заведений. М., Academ A, 2010 г.

Стойлова Л.П. .Лаврова Л.П. Задачник-практикум по математике, М., Просвещение, 2010г.  
Уртенов Н. С. Основные понятия математики: учебное пособие / Н. С. Уртенов. − Ростов н/Д , 2010.

Богомолов, Н. В. Математика: учеб.дляссузов / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. − М., 2009. – 400 с.  
Омельченко В. П. Математика: учеб.пособие / В. П. Омельченко, Э. В. Курбатова. – Ростов н/Д, 2012. – 308 с.  
Интернет-ресурсы   
http://en.ppt-online.org/145625   
https://studfiles.net/preview/5358196/   
https://sites.google.com/site/uvarovaap/family-map/11-klass/osnovy-logiki-logiceskie-operacii-i-tablicy-istinnosti   
https://studopedia.ru/6\_19466\_vvedenie.html